

UNTERSUCHUNG DES ZUSAMMENHANGS
ZWISCHEN DER SÄTTIGUNG DER
UNENDLICH AUSGEDEHNTEN KERNMATERIE
IN DER BRUECKNERSCHEN THEORIE
UND DEN PARAMETERN EINER
ZWEITEILCHENWECHSELWIRKUNG

von

MALUR RAMANNA BHAGAVAN

1961

UNTERSUCHUNG DES ZUSAMMENHANGS
ZWISCHEN DER SÄTTIGUNG DER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN
KERNMATERIE IN DER BRUECKNERSCHEN THEORIE UND DEN
PARAMETERN EINER ZWEITEILCHENWECHSELWIRKUNG.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt
von
Malur Ramanna Bhagavan
aus
Bangalore, Indien

Institut für Theoretische Physik
der Universität München

Juni 1961



Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 26. 7. 1961

Inhaltsverzeichnis:

I. Einleitung	Seite 1
II. Problemstellung und Diskussion der Voraussetzungen der Rechnung	Seite 15
III. Durchführung der Rechnung	Seite 17
1. Der Ausdruck für die Bindungs- energie der unendlich ausgedehnten Kernmaterie	Seite 17
2. Der Verlauf der "optimalen" Dichte für die verschiedenen Werte der $m(= 3C + 9D/A)$, $n(= A + 3B/A)$, ($\alpha \beta$)	Seite 25
3. Das Verhältnis zwischen den Werten von m und n , die Sätti- gung liefern	Seite 27
4. Die verschiedenen Arten von Zweiteilchenpotentialen, die Sättigung liefern	Seite 28
a) Fall $\beta > \alpha$	Seite 29
b) Fall $\beta < \alpha$	Seite 33
IV. Diskussion der Ergebnisse	Seite 39
V. Literaturverzeichnis	Seite 48

I. Einleitung

Aus der Kernphysik ist die Tatsache wohlbekannt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen auf jeden Fall stark und kurzreichweitig (10^{-13} cm) ist. Außer diesen beiden Eigenschaften pflegt man auch noch Austauschigenschaften in Betracht zu ziehen. Andererseits gelingt es, viele Kerneigenschaften mit Hilfe des Schalenmodells befriedigend zu erklären. Das Kernschalenmodell benötigt ein im Raum glatt variierendes Kollektiv-Potential, in dem sich die einzelnen Nukleonen bewegen. Im Jahre 1954 zeigten Feshbach, Porter und Weisskopf (Fe. 1), daß sogar für freie Neutronen, mittlerer Energie, der Begriff der Quantenzustände des individuellen Nukleons sinnvoll ist. Noch vor einiger Zeit schien es sehr schwierig, die bekannten Eigenschaften der Zweikörperwechselwirkung mit dem Vorhandensein eines kollektiven Potentials in Einklang zu bringen. Vor 1955 gab es keine befriedigende theoretische Erklärung für die Entstehung eines solchen Einteilchenpotentials in einem System aus mehreren Nukleonen. Weitere Versuche über den Einfang eines π -Mesons durch einen Kern, den Photoeffekt mit hochenergetischen γ -Strahlen, und den "Pick-up" Prozess beim Deuteron, in dem ein einfallendes Proton hoher Energie ein Neutron, unter Bildung eines Deuterons aus einem Kern herausfängt, wiesen

Anmerkung: Die Hinweise (Fe. 1) etc. beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit, Seite 48.

auf die Existenz von Komponenten hohen Impulses in der Kernwellenfunktion hin (Br. 1). Es gab aber keine wohlbegründete Theorie für die Existenz dieser Komponenten. Diese Lage besserte sich, als 1955 K. A. Brueckner und seine Mitarbeiter eine mathematische Methode entwickelten, mit deren Hilfe sie ein Einteilchenpotential in einem System von mehreren Nukleonen, und die Komponenten hohen Impulses der Wellenfunktion herleiten konnten (Br. 2 bis 5). Sich auf die Watson'sche Theorie der Mehrfachstreuung stützend (Wa. 1, Fr. 1), entwickelten Brueckner und Levinson (Br. 3) eine allgemeine, der Bedingung der Selbstkonsistenz genügende Methode für die Berechnung der Kern-Energiezustände. In einer Arbeit von Bethe (Be. 1) sind die zentralen Begriffe, der formale Beweis der Brueckner'schen Theorie, und die Herleitung des Einteilchenpotentials im Rahmen dieser Theorie elegant und klar dargestellt zu finden. In unseren Rechnungen werden wir Gebrauch von dieser Bethe'schen Behandlung machen.

Die beiden Hauptbegriffe der Theorie sind die Einteilchen-Wellenfunktion und ein Potential U (von Bethe V genannt), das in diesen Einteilchenzuständen diagonal ist (Be. 1, Abschnitt 1). Die Brueckner'sche Methode behandelt die Wechselwirkung zwi-

schen zwei Nukleonen exakt, und ersetzt die Wirkung aller anderen Teilchen auf dieses Paar durch einen gemittelten Wert. Das bedeutet eine Verbesserung im Vergleich zur Hartree'schen Methode, in der die Wirkung aller anderen Teilchen auf ein herausgegriffenes durch ein mittleres Potential ersetzt wird.

Da wir uns nur für die Eigenschaften der Kernmaterie interessieren, werden wir zunächst die Ausdrücke für die Reaktionsmatrix von Watson, das Einteilchenpotential und die Energieeigenwerte des individuellen Teilchens für den Fall des endlichen Kernes angeben, und dann Änderungen dieser Ausdrücke für den Fall der unendlich ausgedehnten Kernmaterie unternehmen.

Bei der Behandlung der unendlich ausgedehnten Kernmaterie (im folgenden kurz Kernmaterie genannt) vernachlässigt man die Coulomb'sche Wechselwirkung. In dem Modell der unendlich ausgedehnten Kernmaterie ist es nicht möglich, die Coulombsche Wechselwirkung zwischen den Nukleonen zu berücksichtigen, weil sie einen unendlichen Beitrag zur Energiedichte liefern würde.

Wir nehmen an, daß das Einteilchenpotential U im Impulsraum durch die Matrix $(\vec{k}'/U/\vec{k})$ dargestellt wird.

Ein Zustand des Kernes ist dann dadurch definiert, daß man angibt, welche der Einteilchenzustände ψ_n

besetzt sind. Die Menge der besetzten Einteilchenzustände wird eine Konfiguration genannt. Jede Konfiguration wird durch eine Slater - Determinante, die alle besetzten Einteilchenzustände enthält, beschrieben. Diese Determinante nennen wir eine Modellwellenfunktion. Die Eigenschaften der Einteilchenwellenfunktionen sichern die Orthogonalität der zu verschiedenen Konfigurationen gehörigen Modellwellenfunktionen. Wir wollen also alle Einteilchenwellenfunktionen dem Eigenfunktionssatz derselben Potential-Matrix $(\vec{k}'/U/\vec{k})$ entnehmen. Aus diesen Konfigurationen wählen wir eine aus, deren Eigenschaften wir berechnen möchten. Diese Konfiguration wird die ausgewählte Konfiguration genannt. Es ist nicht notwendig, daß die ausgewählte Konfiguration den Grundzustand des Kernes darstellt.

Der Hauptzug der Brueckner'schen Theorie ist der Gebrauch der Reaktionsmatrix für die Beschreibung der Streuung der Nukleonen, die sich im Kerninnern bewegen. Betrachten wir, z.B. die Streuung zweier Nukleonen aus ihren Anfangszuständen n_i^0, n_j^0 innerhalb der ausgewählten Konfiguration in die Endzustände n_i^1, n_j^1 . Die Reaktionsmatrix G für dieses Problem ist die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} (n_i^1 n_j^1 | f_{ij} | n_i^0 n_j^0) &= (n_i^1 n_j^1 | v_{ij} | n_i^0 n_j^0)_N + \\ &+ \sum_{n_i'' n_j''} (n_i^1 n_j^1 | v_{ij} | n_i'' n_j'')_N \frac{Q}{E} (n_i'' n_j'' | f_{ij} | n_i^0 n_j^0) \end{aligned} \quad (1)$$

wo V_{ij} die Zweiteilchenwechselwirkung, $(n_i^0 n_j^0)$ die Modellwellenfunktion (Slater-Determinante) des Kerns ist, wobei die Nukleonen i und j mit ihren Anfangszuständen $n_i^0 n_j^0$ in der ausgewählten Konfiguration sind; alle anderen Nukleonen sind in den Zuständen n_k^0 . Es sei darauf hingewiesen, daß rechts und links von den Operatorsymbolen in Gl. (1) die ganzen Konfigurationen stehen. Die Streuung im Kerninnern soll nur die zwei Nukleonen i und j betreffen.

$(n_i' n_j')$ ist die Modellwellenfunktion des Kerns, wenn i und j sich in den Endzuständen n_i', n_j' befinden, und $n_i^0 n_j^0$ unbesetzt sind; die anderen Nukleonen k bleiben in ihren Anfangszuständen n_k^0 .

$(n_i'' n_j'')$ ist die Modellwellenfunktion des Kerns, wenn i und j sich in den Übergangszuständen n_i'', n_j'' befinden, n_i^0, n_j^0 unbesetzt sind und die anderen Nukleonen weiter in ihren Anfangszuständen n_k^0 bleiben. Die Anregungsenergie - e ist ausgedrückt durch

$$-e = E(B) - E(c),$$

wo $E(c)$ die Energie der ausgewählten Konfiguration und $E(B)$ die Energie der Übergangskonfiguration bedeuten. In der Konfiguration B sind die Nukleonen i und j in den Zuständen n_i'', n_j'' und die Zustände n_i^0, n_j^0 sind unbesetzt. Alle anderen Nukleonen k sind in ihren Anfangszuständen n_k^0 . Die Energie E ist mit Modellwellenfunktionen und mit dem "Modell-Hamiltonoperator" H_M berechnet. (Siehe S. 9 u. Be.1, Gl.4.17)

Es ist klar, daß Zustände mit $e = 0$ nicht mitgenommen werden dürfen. Das tut man, wenn man in der Gleichung 1 nur den Hauptwert in Betracht zieht. Der Operator Q erfüllt die Aufgabe eines Hauptwertoperators. Wir legen fest, daß Q angewandt auf alle Zustände für die $e = 0$, Null gibt, d.h. für die gewählte Konfiguration und alle anderen Konfigurationen, die die gleiche Energie besitzen.

In den Matrixelementen

$$(\dot{n}_i' \dot{n}_j' | v_{ij} | \dot{n}_i \dot{n}_j)_N \quad (2)$$

weist der Index N darauf hin, daß die Matrixelemente zwischen den Modellwellenfunktionen zu nehmen sind. Die Matrixelemente (2) verschwinden automatisch, wenn irgendeiner der vier Zustände $\dot{n}_i^0$, $\dot{n}_j^0$, $\dot{n}_i^1$, $\dot{n}_j^1$, mit einem der Zustände $\dot{n}_k^0$ übereinstimmt, wenn $\dot{n}_i^0 = \dot{n}_j^0$, oder wenn $\dot{n}_i^1 = \dot{n}_j^1$ ist. Wenn keine solchen durch das Pauliprinzip geregelten Verbote vorhanden sind, bekommen wir

$$(\dot{n}_i' \dot{n}_j' | v_{ij} | \dot{n}_i \dot{n}_j)_N = (\dot{n}_i' \dot{n}_j' | v_{ij} | \dot{n}_i \dot{n}_j)_P - (\dot{n}_j' \dot{n}_i' | v_{ij} | \dot{n}_i \dot{n}_j)_P \quad (3)$$

wo die Matrixelemente mit dem Index P jetzt ohne Berücksichtigung der Wirkung anderer Nukleonen genommen werden müssen, und folgendermassen ausgedrückt sind:

$$(n_i' n_j' | v_{ij} | n_i^0 n_j^0)_p = \int \psi_{n_i'}^*(\vec{n}_i) \psi_{n_j'}^*(\vec{n}_j) v_{ij}(n_{ij}) \psi_{n_i^0}(\vec{n}_i) \psi_{n_j^0}(\vec{n}_j) d^3 n_i d^3 n_j \quad (4)$$

Der Austauschterm ist gleich

$$(n_j' n_i' | v_{ij} | n_i^0 n_j^0)_p = \int \psi_{n_j'}^*(\vec{n}_i) \psi_{n_i'}^*(\vec{n}_j) v_{ij}(n_{ij}) \psi_{n_i^0}(\vec{n}_i) \psi_{n_j^0}(\vec{n}_j) d^3 n_i d^3 n_j \quad (5)$$

wo z.B. $\psi_{n_i^0}(\vec{n}_i)$ die Einteilchenwellenfunktion des Teilchens i im Zustand n_i^0 ist. $\psi_{n_i^0}$ enthält Spin- und Ladungsfunktionen und sieht folgendermaßen aus:

$$\psi_{n_i^0}(\vec{n}_i) = m_i^0(i) d_i(i) \chi_i(i) \quad (6)$$

wo $m_i^0(1)$ den räumlichen Teil der Wellenfunktion, d_i den Spinanteil und χ_i den Ladungsteil darstellt. Das Integralzeichen in (4) und (5) schließt auch die Summation über Spin und Ladung ein. Der Operator v_{ij} darf auch Spin- und Ladungsoperatoren enthalten.

Nach Bethe (Be. 1, Gl. 3. 9) schreiben wir für die Energie eines Teilchens i in einem besetzten Zustand der gewählten Konfiguration den Ausdruck

$$E(n_i^0) = (n_i^0 | T | n_i^0) + \sum_{k \neq i} (n_i^0 n_k^0 | f_{ik} | n_i^0 n_k^0) \quad (7)$$

oder, da $(n_i^0 n_k^0 | f_{ij} | n_i^0 n_k^0) = 0$ für $i = k$,

$$E(n_i^0) = (n_i^0 | T | n_i^0) + \sum_k (n_i^0 n_k^0 | f_{ik} | n_i^0 n_k^0), \quad (8)$$

wo T den Operator der kinetischen Energie darstellt.

Wir werden hier nur kurz andeuten, wie man zu diesem Ausdruck gelangt. Die Energie E_{knt} einer Konfiguration ist durch die "Modellwellengleichung"

$$(E - H_M) \Phi_B = 0 \text{ gegeben,}$$

wo $H_M = \sum T_i + \sum \bar{f}_{ij}$ den Modell-Hamiltonoperator

und Φ_B die Modellwellenfunktion bedeuten.

Die $\bar{f}_{ij}$ sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} (n_i n_j | \bar{f}_{ij} | n_i n_j) &= (n_i n_j | f_{ij} | n_i n_j) \\ (n_i' n_j | \bar{f}_{ij} | n_i n_j) &= (n_i' n_j^0 | f_{ij} | n_i n_j^0), \text{ wenn } n_i' \neq n_i \\ (n_i' n_j' | \bar{f}_{ij} | n_i n_j) &= 0, \text{ wenn } n_i', n_j' \neq n_i, n_j \end{aligned}$$

Wir definieren die Anregungsenergie $-e$ als diagonal in den Modellwellenfunktionen Φ und bekommen, unter Vernachlässigung der Terme, die mit $1/A$ abnehmen ($A =$ Gesamtzahl der Nukleonen),

$$\begin{aligned} -e_{ij} &= (n_i | T_i | n_i) + \sum_{k \neq i} (n_i n_k^0 | f_{ik} | n_i n_k^0; n_i^0 n_j^0, n_j) - (n_i^0 | T_i | n_i^0) \\ &\quad - \sum_{k \neq i} (n_i^0 n_k^0 | f_{ik} | n_i^0 n_k^0) + [\text{Ähnliche Terme für } j] \end{aligned}$$

Man setzt dann

$$\begin{aligned} -e_{ij} &= E(n_i) + E(n_j) - E(n_i^0) - E(n_j^0) \quad \text{und} \\ E(n_i^0) &= (n_i^0 | T_i | n_i^0) + \sum_{k \neq i} (n_i^0 n_k^0 | f_{ik} | n_i^0 n_k^0) \end{aligned}$$

(Beilage 1. § III)

wo $E(n_i)$ näherungsweise als die Energie des Nukleons i im Zustand n_i innerhalb der Konfiguration definiert wird. Dies ist eine gute Näherung für nicht singuläre Zweiteilchenwechselwirkungen und für einen "hard core".

Nach Bethe können wir jetzt ein Einteilchenpotential so definieren, daß $E(n_i^0)$ die Energie darstellt, die nötig ist, das Teilchen i aus der gewählten Konfiguration zu entfernen; d.h., wir definieren das Einteilchenpotential U durch die Gleichung

$$(n_i^0 | U | n_i^0) = \sum_k (n_i^0 n_k^0 | f_{ik} | n_i^0 n_k^0) \quad (9)$$

Bequemlichkeitshalber werden wir im folgenden statt $n_i^0 n_k^0$ einfach $n_i n_k$ schreiben. Die Umschreibung der Gleichung (9) liefert uns

$$(n_i | U | n_i) = \sum_k (n_i n_k | f_{ik} | n_i n_k) \quad (10)$$

Änderungen im Fall der Kernmaterie:

In der Kernmaterie bleibt der Impuls erhalten.

Stellen $\vec{k}_i$, $\vec{k}_j$ und $\vec{k}_i'$, $\vec{k}_j'$ die Anfangs- und Endimpulse der Teilchen i und j dar, so gilt die Gleichung

$$\vec{k}_i + \vec{k}_j = \vec{k}_i' + \vec{k}_j' \quad (11)$$

Darum ist jetzt die Einteilchen-Potentialmatrix im Impulsraum diagonal (Be. 1, Gl. 9. 2) und wir bekommen

$$(\vec{k}_i' | U | \vec{k}_i) = U(k_i) (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_i' - \vec{k}_i) \quad (12)$$

Die Gleichungen (10 und (12) zusammen ergeben den folgenden Ausdruck für das Einteilchenpotential in der Kernmaterie

$$U(k_i) = (2\pi)^{-3} \int_0^{k_F} (\vec{k}_i \vec{k}_j | f_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j) d^3 k_j \quad (13)$$

wo die Summation $\sum_j$ durch das Integralzeichen ersetzt ist. Da wir es mit der Kernmaterie zu tun haben, ist der Fermi'sche Grenzimpuls k_F die obere Grenze des Integrals. Das Integral schließt auch die Summationen über Spin und Ladung ein.

Im Falle der Kernmaterie wird auch die Summation über die Übergangszustände in der Gleichung für die Reaktionsmatrix (Gl.1) durch ein Integral ersetzt. In diesem Fall ist der Grenzimpuls k_F die untere Integrationsgrenze.

Ausführlich geschrieben lauten die diagonalen Matrixelemente der Reaktionsmatrix

$$\begin{aligned} (\vec{k}_i \vec{k}_j | f_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j) &= (\vec{k}_i \vec{k}_j | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N + \\ &+ \int_{k_F} (\vec{k}_i \vec{k}_j | v_{ij} | \vec{k}_i'' \vec{k}_j'')_N \frac{Q}{e} (\vec{k}_i'' \vec{k}_j'' | f_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j) d^3 \vec{k}_i'' d^3 \vec{k}_j'' \end{aligned} \quad (14)$$

Bethe hat gezeigt (Be. 1. Sec. X), daß durch die Wirkung des Pauliprinzips der Beitrag der Übergangszustände stark abnimmt. Im Vergleich mit dem ersten Term, trägt der, die Übergangszustände enthaltende Term

$$\int_{k_j} (\vec{k}_i \vec{k}_j | v_{ij} | \vec{k}_i'' \vec{k}_j'')_N \frac{Q}{e} (\vec{k}_i'' \vec{k}_j'' | f_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j) d^3 \vec{k}_i'' d^3 \vec{k}_j' \quad (15)$$

nur etwa 6 % bei. Diese Aussage gilt nur für nicht singuläre Zweiteilchenwechselwirkungen, speziell für Wechselwirkungen ohne "hard core".

Da wir hier nur daran interessiert sind, die qualitativen Züge des Zusammenhangs zwischen der Sättigung der Dichte und den Parametern einer Zweiteilchenwechselwirkung zu untersuchen, vernachlässigen wir den zweiten Term, der nur einen Beitrag von etwa 6 % liefert. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Einteilchenpotentials, welche für die Brueckner'sche Theorie charakteristisch ist, wird dabei nicht beseitigt.

Für das Einteilchenpotential erhalten wir jetzt den Ausdruck

$$U(k_i) = (2\pi)^3 \int_0^{k_j} d^3 k_j (\vec{k}_i \vec{k}_j | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N \quad (16)$$

Die zur Kernmaterie passenden räumlichen Teile der Einteilchenwellenfunktionen sind ebene Wellen. Dies ist eine Folge der Invarianz aller physikalischen Größen bei Translation in unendlicher Materie. Wir wählen ebene Wellen, die auf die Dichte 1 normiert sind. Dann hat Gl. 6 die Gestalt

$$\psi_{n_i}(\vec{r}_i) = e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i)} \alpha_i(i) \gamma_i(i) \quad (17)$$

Die Bindungsenergie pro Teilchen in der Kernmaterie:

Aus Gl. 8 erhalten wir den Ausdruck für die Energie eines Nukleons in der Kernmaterie:

$$E(k_i) = \hbar^2 k_i^2 / 2m + U(k_i) \quad (18)$$

Die Energie pro Normierungsvolumen der Kernmaterie ist gleich

$$(2\pi)^{-3} \int_0^{k_f} 4 d^3 k_i \left[\hbar^2 k_i^2 / 2m + \frac{1}{2} U(k_i) \right] \quad (19)$$

wo der Faktor $1/2$ im zweiten Term dafür sorgt, daß man jedes Paar der wechselwirkenden Nukleonen nur einmal zählt; der Faktor 4 folgt aus der Tatsache, daß es für jeden Impulszustand k_1 vier Nukleonen gibt, nämlich mit zwei Spinrichtungen und zwei Ladungswerten.

Die gesamte Energie eines aus A Nukleonen gebildeten Kernes ist gleich (Be. 1. Gl.5.5 und Gl. 9.15)

$$W_{\text{gesamt}} = \Omega \cdot 4 (2\pi)^{-3} \int_0^{k_f} \left[\frac{1}{2} k_i^2 + \frac{1}{2} U(k_i) \right] d^3 k_i \quad (20)$$

wo Ω das Volumen des Kernes darstellt.

Da die Dichte ρ der Kernmaterie gleich

$$\rho = A/\Omega = \left(\frac{2}{3\pi^2} \right) k_f^3 \quad (21)$$

ist, ist diese Energie offenbar eine Funktion der Dichte.

Eden (Ed. 1 und 2) hat gezeigt, daß in diesem Falle das "self consistent field" Problem einem Variationsproblem äquivalent ist. Die Variationsbedingung kann folgenderweise geschrieben werden:

$$dW/d\rho = dW/dk_f = 0 \quad (22)$$

wo

$$W = \left[\int_0^{k_f} d^3 k_i \left\{ \frac{1}{2} k_i^2 + \frac{1}{2} U(k_i) \right\} \right] / \int_0^{k_f} d^3 k_i \quad (23)$$

Da W eine Funktion der Dichte allein ist, stellt W die Extraenergie dar, die dem großen Kern hinzugefügt wird, wenn er bei konstanter Dichte noch ein Nukleon aufnimmt. Mit anderen Worten, die Bindungsenergie pro Teilchen ist gleich

$$-W = |w| = - \left[\int_0^{k_f} d^3 k_i \left\{ \frac{1}{2} k_i^2 + \frac{1}{2} U(k_i) \right\} \right] / \int_0^{k_f} d^3 k_i \quad (24)$$

$$W = T_{\text{gemittelt}} + \frac{1}{2} U_{\text{gemittelt}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T_{\text{gemittelt}} &= \left[\int_0^{k_f} d^3 k_i \, k^2 k_i^2 / 2m \right] / \int_0^{k_f} d^3 k_i \\ &= \frac{3}{5} (k_f^2 k_f^2 / 2m) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{und } U_{\text{gemittelt}} = \left[\int_0^{k_f} d^3 k_i \, U(k_i) \right] / \int_0^{k_f} d^3 k_i \quad (27)$$

Es muß hier erwähnt werden, daß Brueckner (Br. 6) die Gültigkeit der Gleichung (25) für die Born'sche Näherung bewiesen hat. Für höhere Näherungen kommen Korrekturterme hinzu.

Wir haben nun gesehen, daß W nur dann die Bindungsenergie pro Teilchen in der Kernmaterie darstellt, wenn diese Energie ein Minimum bezüglich der Dichte ist; d.h., diese Bedingung führt auch zu demjenigen Wert der Dichte, der die Sättigung sicherstellt. Diesen Wert der Dichte nennen wir die optimale Dichte.

II. Problemstellung und Diskussion der Voraussetzungen der Rechnung.

Wie wir gesehen haben, bietet die Brueckner'sche Theorie eine Methode für die Herleitung der Bindungsenergie gesättigter Kernmaterie an.

Die Bedingung, die die Sättigung der Kernmaterie liefert, ergibt auch einen Zusammenhang zwischen der optimalen Dichte und den Parametern der Zweiteilchenwechselwirkung. Ein Teil unserer Aufgabe ist es, diese Variation der optimalen Dichte mit variierenden Parameterwerten der Zweiteilchenwechselwirkung zu studieren. Unsere Hauptaufgabe wird darin liegen, die verschiedenen Zweiteilchenpotentiale, die zu diesen Parametern gehören, zu untersuchen.

In unseren Rechnungen werden wir die allgemeine Form des zentralen Zweiteilchenpotentials anwenden:

$$v_{ij} = (A + B \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{\alpha \neq \beta}) e^{-\alpha r} + (C \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j + D (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) - (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)) e^{-\beta r} \quad (28)$$

σ ist der Spinoperator und τ ist der Ladungsoperator (Bt. 1., Seite 160). Charakteristisch für diese Form des Zweiteilchenpotentials ist der Unterschied zwischen den Abfallraten des τ -abhängigen und τ -unabhängigen Teils. Wir werden das Verhalten der Zweiteilchenpotentiale für verschiedene Werte des Verhältnisses (α/β) untersuchen.

Es ist hier zu erwähnen, daß Rotenberg (Rg. 1) die Abhängigkeit der Konvergenz der Hartree-Fock'schen Methode von den Parametern des Zweiteilchenpotentials im Falle eines großen aber endlichen Kerns untersucht hat. Er findet, daß die Werte der Parameter, die den Wigner'schen minimalen Sättigungsbedingungen genügen, die beste Konvergenz liefern. C. Villi (Vi. 1) verwendet ein festes Zweiteilchenpotential, um die Wirkung einer Variation der Dichte auf die Bindungsenergie zu studieren. Sowohl Rotenberg und Wilets (Rg. 2), als auch Brueckner (Br. 7) verwenden ein festes Zweiteilchenpotential, um die entsprechende optimale Dichte herzuleiten.

III. Durchführung der Rechnung.

1. Der Ausdruck für die Bindungsenergie der Kernmaterie unter Anwendung der Gl. 28.

Aus der Gl. (27) haben wir

$$U_{\text{gemittelt}} = \left[\int_0^{k_f} U(k_i) d^3 k_i \right] / \int_0^{k_f} d^3 k_i$$

wo $U(k_i)$ das Einteilchenpotential darstellt.

Aus der Gl. (16) erhalten wir

$$U(k_i) = (2\pi)^{-3} \int_0^{k_f} d^3 k_j (\vec{k}_i \vec{k}_j | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N$$

wo das Integralzeichen nur die Summation über die Spins und Ladungswerte des Teilchens j einschließt; Spin und Ladung des Teilchens i sind festgehalten. Diese Summation werden wir jetzt durchführen. Nach Bethe (Be 1. Abschnitt VIII) verwenden wir die folgenden Ausdrücke für die Wellenfunktionen der Anfangs- und Endzustände:

$$(\vec{k}_i \vec{k}_j)_{\text{Anfang}} = m_i(\vec{k}_i) \alpha_i(i) \gamma_i(i) m_j(\vec{k}_j) \alpha_j(j) \gamma_j(j)$$

m ist der Raumanteil, α der Spinteil und γ der Ladungsteil der Einteilchenwellenfunktion, wie schon

bei der Gl. (6) erklärt wurde. Die Spinfunktion kann die beiden Werte α_i und β_i annehmen, die Ladungsfunktion die Werte γ_i und δ_i .

$$|\vec{k}_i' \vec{k}_j'\rangle_{\text{Ende}} = \left\{ m_i'(\vec{k}_i) \alpha_i'(i) \gamma_i'(i) m_j'(\vec{k}_j) \alpha_j'(j) \gamma_j'(j) - \right. \\ \left. - m_j'(\vec{k}_i) \alpha_j'(i) \gamma_j'(i) m_i'(\vec{k}_j) \alpha_i'(j) \gamma_i'(j) \right\}$$

Durch den Gebrauch dieser Ausdrücke für die Wellenfunktionen der Anfangs- und Endzustände vermeiden wir den Faktor $1/\sqrt{1}$.

Ausführlich geschrieben, erhalten wir für

$$(\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} (\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N &= \\ &= (\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_p - (\vec{k}_j' \vec{k}_i' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_p \\ &= \left(m_i'(\vec{k}_i) \alpha_i'(i) \gamma_i'(i) m_j'(\vec{k}_j) \alpha_j'(j) \gamma_j'(j) | v_{ij} | \times \right. \\ &\quad \left. \times m_i(\vec{k}_i) \alpha_i(i) \gamma_i(i) m_j(\vec{k}_j) \alpha_j(j) \gamma_j(j) \right) - \\ &- \left(m_j'(\vec{k}_i) \alpha_j'(i) \gamma_j'(i) m_i'(\vec{k}_j) \alpha_i'(j) \gamma_i'(j) | v_{ij} | \times \right. \\ &\quad \left. \times m_i(\vec{k}_i) \alpha_i(i) \gamma_i(i) m_j(\vec{k}_j) \alpha_j(j) \gamma_j(j) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Bei der Summation kommen nur die folgenden vier Fälle in Betracht:

Fall a): Die Anfangspins sind gleich; d.h., $\alpha_i(i) = \alpha_j(j) = \alpha$,

Die Anfangsladungen sind gleich; d.h., $\gamma_i(i) = \gamma_j(j) = \gamma$

Dann müssen auch die Endspins und die Endladungen untereinander gleich sein; d.h., $\alpha'_i(i) = \alpha'_j(j) = \alpha$,

$$\gamma'_i(i) = \gamma'_j(j) = \gamma$$

Diesen Fall muß man hier zulassen, weil das Pauli-prinzip nur die Antisymmetrie der gesamten Zweiteilchenwellenfunktion fordert. Im Fall a) kann also ein antisymmetrischer Raumanteil in der Gesamtwellenfunktion auftreten.

Aus der Gl. 29 erhalten wir für diesen Fall, unter

Anwendung der Gl. 28

$$\begin{aligned} (\vec{k}_i' \vec{k}_j' | u_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_{\text{Fall a)}} &= (m_i'(\vec{\pi}_i) m_j'(\vec{\pi}_j) | (A+B) e^{-d\vec{r}} + \\ &+ (C+D) e^{-\beta\vec{r}} | m_i(\vec{\pi}_i) m_j(\vec{\pi}_j)) + (m_j'(\vec{\pi}_i) m_i'(\vec{\pi}_j) | (-A-B) e^{-d\vec{r}} + \\ &+ (-C-D) e^{-\beta\vec{r}} | m_i(\vec{\pi}_i) m_j(\vec{\pi}_j)) \end{aligned}$$

Der erste Summand ist der sogenannte direkte Term und der zweite der Austauschterm. Wir bezeichnen den direkten Term mit dem Index d und den Austausch-

term mit dem Index x . Damit wird der obige Ausdruck folgendermaßen geschrieben:

$$(\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_{N, \text{Fall a)}} = \left[(A+B) e^{-\alpha \hbar} \right]_d + \left[(C+D) e^{-\beta \hbar} \right]_d - \left[(A+B) e^{-\alpha \hbar} \right]_x - \left[(C+D) e^{-\beta \hbar} \right]_x \quad (29a)$$

Fall b): Die Anfangspins sind gleich; d.h., $\alpha_i(i) = \alpha_j(j) = \alpha_1$, Die Anfangsladungen sind ungleich; wir setzen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $\gamma_i(i) = \gamma_1$, $\gamma_j(j) = \delta_2$

Da Spin und Ladung des Teilchens i festgehalten worden sind, bekommen wir für die Endspins und die Endladungen die folgende Werte:

$$\alpha_i'(i) = \alpha_j'(j) = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \gamma_i'(i) = \gamma_1, \quad \gamma_j'(j) = \delta_2$$

Dann erhalten wir

$$(\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_{N, \text{Fall b)}} = \left[(A+B) e^{-\alpha \hbar} \right]_d - \left[(C+D) e^{-\beta \hbar} \right]_d - 2 \left[(C+D) e^{-\beta \hbar} \right]_x \quad (29b)$$

Fall c): Die Anfangspins sind ungleich; d.h.,

$$\alpha_i(i) = \alpha_1, \quad \alpha_j(j) = \beta_2$$

Die Anfangsladungen sind gleich; d.h.,

$$\gamma_i(i) = \gamma_j(j) = \gamma_1$$

Wir argumentieren wie vorher und erkennen, daß die Endspins und die Endladungen folgende Werte haben:

$$\alpha_i'(i) = \alpha_1, \quad \alpha_j'(j) = \beta_2, \quad \gamma_i'(i) = \gamma_j'(j) = \gamma_1$$

Dann erhalten wir

$$(\vec{k}_i' \vec{k}_j' | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_{N, \text{Fall c)}} = \left[(A-B) e^{-\alpha \hbar} \right]_d + \left[(C-D) e^{-\beta \hbar} \right]_d - \left[2B e^{-\alpha \hbar} \right]_x - \left[2D e^{-\beta \hbar} \right]_x \quad (29c)$$

Fall d) : Die Anfangspins sind ungleich; d.h., $\alpha_i(i) = \alpha_1$

und $\alpha_j(j) = \beta_2$

Die Anfangsladungen sind ungleich; d.h. $\gamma_i(i) = \gamma_1$

und $\gamma_j(j) = \delta_2$

Für die Endspins und die Endladungen bekommen wir

$$\alpha'_i(i) = \alpha_1, \quad \alpha'_j(j) = \beta_2, \quad \gamma'_i(i) = \gamma_1, \quad \gamma'_j(j) = \delta_2$$

Dann wird

$$(\vec{k}'_i \vec{k}'_j | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_{N, \text{Fall d})} = \left[(A-B) e^{-\alpha \kappa} \right]_d + \left[(-c+D) e^{-\beta \kappa} \right]_d - \left[4D e^{-\beta \kappa} \right]_x \quad (29d)$$

Wir erhalten den Ausdruck für die diagonalen Matrixelemente, die über die Spins und Ladungen des Teilchens j summiert sind, wenn wir die vier Gleichungen 29a, b, c und d addieren. D.h.,

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin u. Ladung von } j} (\vec{k}'_i \vec{k}'_j | v_{ij} | \vec{k}_i \vec{k}_j)_N &= \left(m_i(\vec{\kappa}_i) m_j(\vec{\kappa}_j) | 4A e^{-\alpha \kappa} | m_i(\vec{\kappa}_i) m_j(\vec{\kappa}_j) \right) + \\ &+ \left(m_j(\vec{\kappa}_i) m_i(\vec{\kappa}_j) | (-A-3B) e^{-\alpha \kappa} + (-3c-9D) e^{-\beta \kappa} | m_i(\vec{\kappa}_i) m_j(\vec{\kappa}_j) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Wir werden jetzt die Matrixelemente, die in der

Gl. 30 vorhanden sind, berechnen.

$$\begin{aligned} & \left(m_i(\vec{\kappa}_i) m_j(\vec{\kappa}_j) | 4A e^{-\alpha \kappa} | m_i(\vec{\kappa}_i) m_j(\vec{\kappa}_j) \right) = \\ &= \int e^{-i(\vec{k}_i \cdot \vec{\kappa}_i + \vec{k}_j \cdot \vec{\kappa}_j)} 4A e^{-\alpha \kappa} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{\kappa}_i + \vec{k}_j \cdot \vec{\kappa}_j)} d^3 \kappa_i d^3 \kappa_j \quad (31) \\ &= \int 4A e^{-\alpha \kappa} d^3 \kappa \end{aligned}$$

$\kappa = |\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_j|$

$$\begin{aligned}
 & \left(m_j(\vec{k}_i) m_i(\vec{k}_j) \mid (-A-3B)e^{-\alpha r} + (-3C-9D)e^{-\beta r} \mid m_i(\vec{k}_i) m_j(\vec{k}_j) \right) = \\
 & = \int e^{-i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{k}_j \cdot \vec{r}_j)} \left[(-A-3B)e^{-\alpha r} + (-3C-9D)e^{-\beta r} \right] \times \\
 & \quad \times e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{k}_j \cdot \vec{r}_j)} d^3 r_i d^3 r_j \\
 & = \int e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}} \left[(-A-3B)e^{-\alpha r} + (-3C-9D)e^{-\beta r} \right] d^3 r \\
 & = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \left[\cos 2(\vec{k} \cdot \vec{r}) + i \sin 2(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \left[(-A-3B)e^{-\alpha r} + \right. \\
 & \quad \left. + (-3C-9D)e^{-\beta r} \right] \sin \theta d\theta r^2 dr \\
 & \quad k = 1/2 \mid \vec{k}_i - \vec{k}_j \mid
 \end{aligned}$$

Wir setzen $(A + 3B) = nA$ und $(3C + 9D) = mA$ (32)

und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \left(m_j(\vec{k}_i) m_i(\vec{k}_j) \mid (-nAe^{-\alpha r} - mAe^{-\beta r}) \mid m_i(\vec{k}_i) m_j(\vec{k}_j) \right) = \\
 & = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sin 2kr}{2kr} (-nAe^{-\alpha r} - mAe^{-\beta r}) \quad (33)
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (31) und (33) bekommen wir

$$\begin{aligned}
 & (\vec{k}_i \vec{k}_j \mid v_{ij} \mid \vec{k}_i \vec{k}_j)_N = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[4Ae^{-\alpha r} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\sin 2kr}{2kr} \left\{ -nAe^{-\alpha r} - mAe^{-\beta r} \right\} \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

Die Integration über r ergibt

$$(\vec{k}_i \vec{k}_j \mid v_{ij} \mid \vec{k}_i \vec{k}_j)_N = 8\pi \left[4A\alpha^3 - \frac{nA\alpha}{(\alpha^2 + 4k^2)^2} - \frac{mA\beta}{(\beta^2 + 4k^2)^2} \right] \quad (35)$$

Die Gleichungen (16) und (35) zusammen ergeben das Einteilchenpotential $U(k_i)$.

$$U(k_i) = (2\pi)^{-3} 8\pi \int_0^{k_f} d^3 k_f \left[4A \alpha^{-3} - \frac{nA\alpha}{(\alpha^2 + q^2)^2} - \frac{mA\beta}{(\beta^2 + q^2)^2} \right]$$

wo $4k^2 = q^2$ ist.

Da $q^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta$, und $\sin \theta d\theta = q dq / k_i k_f$

haben wir

$$U(k_i) = (2\pi)^{-3} \frac{8\pi \times 2\pi}{k_i} \int_0^{k_f} k_f dk_f \int_{|k_i - k_f|}^{k_i + k_f} q dq \left[4A \alpha^{-3} - \frac{nA\alpha}{(\alpha^2 + q^2)^2} - \frac{mA\beta}{(\beta^2 + q^2)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} U(k_i) = (2\pi)^{-3} & \left[\frac{32}{3} \pi^2 4A k_f^3 \alpha^{-3} - \right. \\ & - 8\pi^2 nA \left\{ \left(\frac{1}{2} k_i \alpha^{-1} \right) \ln \frac{(k_i + k_f)^2 + \alpha^2}{(k_i - k_f)^2 + \alpha^2} - \arctg(k_i - k_f) \alpha^{-1} + \right. \\ & + \arctg(k_i + k_f) \alpha^{-1} \left. \right\} - 8\pi^2 mA \left\{ \left(\frac{1}{2} k_i \beta^{-1} \right) \ln \frac{(k_i + k_f)^2 + \beta^2}{(k_i - k_f)^2 + \beta^2} - \right. \\ & \left. \left. - \arctg(k_i - k_f) \beta^{-1} + \arctg(k_i + k_f) \beta^{-1} \right\} \right] \quad (36) \end{aligned}$$

Der Ausdruck für $U_{\text{gemittelt}}$ (Gl. 27) wird jetzt

$$\begin{aligned} U_{\text{gemittelt}} = \frac{1}{\pi} & \left[\frac{16A}{3} k_\alpha^3 - mA \left\{ \frac{1}{k_\beta} + 2 \arctg 2k_\beta - \right. \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_\beta^3} + \frac{6}{k_\beta} \right) \ln(1 + 4k_\beta^2) \right\} - \\ & \left. - nA \left\{ \frac{1}{k_\alpha} + 2 \arctg 2k_\alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_\alpha^3} + \frac{6}{k_\alpha} \right) \ln(1 + 4k_\alpha^2) \right\} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

$$k_\alpha = k_f \alpha^{-1}; \quad k_\beta = k_f \beta^{-1}.$$

Die Bindungsenergie pro Teilchen in der Kernmaterie hat jetzt die Gestalt

$$W = \frac{3}{5} \left(k_f^2 k_f^2 / 2M \right) + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{16A}{3} k_d^3 - nA \left\{ \frac{1}{k_\beta} + 2 \arctg 2k_\beta - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_\beta^3} + \frac{6}{k_\beta} \right) \ln (1+4k_\beta^2) \right\} - nA \left\{ \frac{1}{k_d} + 2 \arctg 2k_d - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_d^3} + \frac{6}{k_d} \right) \ln (1+4k_d^2) \right\} \right] \quad (38)$$

Die Bedingung für die Sättigung der Energie W:

Der Term

$$\left\{ \frac{1}{k_\beta} + 2 \arctg 2k_\beta - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_\beta^3} + \frac{6}{k_\beta} \right) \ln (1+4k_\beta^2) \right\}$$

und ein ähnlicher k_d abhängiger Term sind für alle (positiven) Werte von k_f positiv. Mit zunehmenden Werten von k_f , nehmen diese Terme auch zu. Aber die Zuwachsrates dieser Terme ist viel langsamer als die des k_f^3 enthaltenden Termes. Deshalb kann die Bindungsenergie nur dann ein Minimum haben, wenn

$$A \geq 0$$

(39)

Da das Glied für die kinetische Energie immer positiv ist, ist W nur dann negativ, d.h., die Bindung ist nur dann möglich, wenn die m und n enthaltenden Terme einen genügend großen negativen Beitrag leisten. Wenn m und n beide negativ sind, ist keine Bindung möglich.

Später, in Abschnitt III, werden wir untersuchen, welche der Zweiteilchenpotentiale, die stets die Bedingung $A > 0$ erfüllen, auch den Wigner'schen Sättigungsbedingungen genügen.

Die Wigner'schen Sättigungsbedingungen lauten:

$$A e^{-\alpha \eta} \geq 0, \quad (A+B) e^{-\alpha \eta} \geq 0, \quad (A e^{-\alpha \eta} + C e^{-\beta \eta}) \geq 0, \\ (A e^{-\alpha \eta} + D e^{-\beta \eta}) \geq 0, \quad \{(A+B) e^{-\alpha \eta} + (C+D) e^{-\beta \eta}\} \geq 0;$$

(Bt. 1, Seite 162)

2. Der Verlauf der optimalen Dichte ρ für die verschiedenen Werte der m , n und (α/β) .

Fall $\alpha > \beta$ (Siehe Gl. 28); $\alpha = 2\beta$

In diesem Falle ist die Abfallrate des τ -abhängigen Teils der Zweiteilchenwechselwirkung kleiner als die des τ -unabhängigen.

Abb. 1 liefert den Verlauf der optimalen Dichte für $m < 0$. Für gegebene m und abnehmende Werte von n nimmt die Dichte ρ rasch ab.

Abb. 2 liefert den Verlauf von P für $m > 0$.

Für gegebene m und abnehmende Werte von n nimmt P rasch ab.

Die Abbildungen 1 und 2 stellen den Verlauf von

$$P \frac{3\pi^2}{2\beta^3} \text{ dar, der mit dem Verlauf von } P$$

übereinstimmt, weil der Wert von β festgehalten wird.

Fall $\beta > 1$; $\beta = 10$

In diesem Falle ist die Abfallrate des τ -abhängigen Teils größer als die des τ -unabhängigen Teils.

Abb. 3 liefert den Verlauf von P für $n < 0$.

Für gegebene n und abnehmende Werte von m , nimmt P rasch ab.

Abb. 4 liefert den Verlauf von P für $n > 0$.

Für gegebene n und abnehmende Werte von m nimmt P rasch ab.

In den Abbildungen 3 und 4 ist der Verlauf von

$$P \frac{3\pi^2}{2\alpha^3} \text{ dargestellt, der wieder mit dem von}$$

P übereinstimmt, weil α fest ist. Die Kurven in

Abb. 1, 2, 3 und 4 sind nicht nach unten fortgesetzt, weil die Werte von den $m - n$ Paaren, die zu diesem Gebiet von P -werten gehören, keine Bindung liefern (d.h., sie liefern nur positive Werte für die Bindungsenergie).

3. Das Verhältnis zwischen den Werten von m und n, die die Sättigung liefern, ist in den Abbildungen 5 und 6 zu sehen.

Abb. 5 bezieht sich auf den Fall $\alpha > \beta$ ($\alpha = 2\beta$) und Abb. 6 auf $\beta > \alpha$ ($\beta = 10\alpha$). Dieses Verhältnis ist für verschiedene Werte von β gezeichnet. Jede m - n Kurve in den Abbildungen 5 und 6 bezieht sich auf ein und denselben Wert der optimalen Dichte der Kernmaterie. Für die Dichte ρ haben wir in unseren Rechnungen den Ausdruck

$$\rho = (2/3\pi^2) k_f^3 = (2/3\pi^2) k_\alpha^3 \alpha^3 \text{ bzw. } = (2/3\pi^2) k_\beta^3 \beta^3$$

benutzt.

Die Abbildungen 5 und 6 lassen erkennen, ob Paare von m, n Werten zu finden sind, die eine bestimmte Art von Triplet- und Singulettzweiteilchenpotential liefern werden. So gibt, z. B. das schraffierte Gebiet zwischen den Geraden $n = \frac{8-m}{2}$ und $n = m - 2$ in der Abb. 5 rein anziehende Triplet- und Singulettzweiteilchenpotentiale mit gerader Parität ($V_{T,g}$ und $V_{S,g}$; l = eine positive gerade Zahl). Ähnlicherweise liefert das Gebiet, das in Abb. 6 unter der Geraden $n = -2$ liegt, rein anziehendes Tripletpotential mit gerader Parität ($V_{T,g}$). Die zu $\beta = 1/0,1544 F^{-1}$ und $\beta = 1/0,1611 F^{-1}$ gehörigen Kurven sind nicht nach unten fortgesetzt, weil diese Werte von m, n Paaren keine Bindung liefern.

$$(F^{-1} = (\text{Fermi})^{-1} = (10^{-13} \text{ cm})^{-1} = 10^{13} \text{ cm}^{-1})$$

Die verschiedenen Arten von Zweiteilchenpotentialen,
die Sättigung liefern:

Wir schreiben den Ausdruck für die Zweiteilchenwechselwirkung U_{ij} (Gl. 28) folgendermaßen um:

$$U_{ij} = (A + B \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) e^{-\alpha r} + (C \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j + D (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)) e^{-\beta r}$$

$$= V_W + P^M V_M + P^H V_H + P^B V_B \quad (40)$$

wo P^M = Majoranaoperator

P^H = Heisenbergoperator

P^B = Bartlettoperator

und V_W = Wigner-Anteil des Potentials

$$= (A - B) e^{-\alpha r} + (-C + D) e^{-\beta r} \quad (41a)$$

V_M = Majorana-Anteil des Potentials

$$= -4 D e^{-\beta r} \quad (41b)$$

V_H = Heisenberg-Anteil des Potentials

$$= 2 (-C e^{-\beta r} + D e^{-\beta r}) = 2 (-C + D) e^{-\beta r} \quad (41c)$$

V_B = Bartlett-Anteil des Potentials

$$= 2 (B e^{-\alpha r} - D e^{-\beta r}) \quad (41d)$$

Die Triplett- und Singulettpotentiale haben die folgende Form:

$V_{T,g}$ = Triplettpotential mit gerader Parität

$$= (A + B) e^{-\alpha r} - 3 (C + D) e^{-\beta r} \quad (42a)$$

$V_{S,g}$ = Singulettpotential mit gerader Parität

$$= (A - 3B) e^{-\alpha r} + (C - 3D) e^{-\beta r} \quad (42b)$$

$V_{T,u}$ = Triplettpotential mit ungerader Parität

$$= (A + B) e^{-\alpha r} + (C + D) e^{-\beta r} \quad (42c)$$

$$\begin{aligned} V_{S,Ug} &= \text{Singulettpotential mit ungerader Parität} \\ &= (A - 3B) e^{-\alpha r} - 3(C - 3D) e^{-\beta r} \end{aligned} \quad (42d)$$

Zunächst betrachten wir den Fall $\beta > \alpha$, speziell $\beta = 10\alpha$. Dieser Fall ist für unsere Rechnungen von besonderem Interesse. Denn wir können hier prüfen, ob die Austauschkräfte (41b, c, d) so rasch abfallen, daß für größere Entfernungen ihre Beiträge mit dem Beitrag der Wignerkraft (41a) vergleichbar werden. Dieser Gedanke war der Hauptgrund dafür, daß wir in U_{ij} zwei Abfallkonstanten α und β eingeführt haben.

Fall $\beta > \alpha$, $\beta = 10\alpha$

Aus den Gleichungen (42a) und (42b) ist zu erkennen, daß es in diesem Fall nicht möglich ist, $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ gleichzeitig für alle Werte von r rein anziehend zu machen. Es ist wichtig anzumerken, daß in unseren Rechnungen der Wert von A immer positiv angenommen wird. Dies folgt aus unseren Überlegungen über die Sättigung der Kernmaterie auf Seite 24. Rein anziehendes $V_{T,g}$ für alle Werte von r ist nur für $nA = (A + 3B) \leq -2A$ und $(C + D) \geq 0$ möglich. Wir werden jetzt diesen Fall untersuchen.

$n = -2$: Aus Abb. 6 ist zu entnehmen, daß nur die Kurven mit $\beta = (1/0.1544)F^{-1}$ und $\beta = (1/0.169)F^{-1}$ die Gerade $n = -2$ schneiden, und solche Werte von m liefern, die eine Bindung ermöglichen (Siehe Seite 27). Für $n = -2$

und $\beta = 1/0,1544 F^{-1}$ bekommen wir $m = 4500$. Wir setzen $C = 3D$ damit $V_{S,g}$ und $V_{S,ug}$ für alle r abstoßend bleiben. Die verschiedenen Potentiale, die zu $c = 3D$ gehören, sind in den Abbildungen 7 und 7a gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = - 3000 A e^{-r/0,1544} \quad (43a)$$

$$V_{S,g} = 4 A e^{-r/1,544} \quad (43b)$$

$$V_{T,ug} = 1000 A e^{-r/0,1544} \quad (43c)$$

$$V_{S,ug} = 4 A e^{-r/1,544} \quad (43d)$$

$$V_W = 2Ae^{-r/1,544} - 500 A e^{-r/0,1544} \quad (44a)$$

$$V_M = -1000 A e^{-r/0,1544} \quad (44b)$$

$$V_H = -1000 A e^{-r/0,1544} \quad (44c)$$

$$V_B = -2Ae^{-r/1,544} - 500 A e^{-r/0,1544} \quad (44d)$$

Der Wert von A kann an eine Volumenenergie von $- 15,5$ Mev angepaßt werden, die von A. E. S. Green und N. A. Engler berechnet wurde (Gr. 1).

Man darf sich nicht durch den Umstand verwirren lassen, daß wir hier und im folgenden abstossende V_W und V_H haben. Immer wenn dies der Fall ist, finden wir nämlich, daß V_B und V_M anziehend sind. Aus Gründen, die ich auf Seite 43 erklären werde, müssen wir die Ausdrücke $V_W + V_B$ und $V_M + V_H$ betrachten, die sich als anziehend herausstellen. Das ist auch der Grund dafür, weshalb wir im folgenden $V_W + V_B$ mit $V_M + V_H$ vergleichen werden.

$V_{T,g}$ ist für alle Werte von r rein anziehend. $V_{S,g}$, $V_{T,ug}$, $V_{S,ug}$ sind dagegen für alle r abstoßend. Die Wigner'schen Sättigungsbedingen sind erfüllt. Für kleinere Entfernungen bleibt V_W anziehend, wird aber abstoßend für $r > 0,95 F$. V_M , V_H und V_B bleiben anziehend für alle Werte von r . $V_W + V_B$ und $V_M + V_H$ bleiben anziehend für alle r . Für $r > 1,5 F$,

$$|V_M + V_H| = 2 |V_W + V_B|.$$

$C < 3D$; Für $n = -2$, $\beta = 1/0.1544 F^{-1}$, $m = 4500$ setzen wir $C < 3D$, damit für kleinere Entfernungen $V_{S,g}$ anziehend ist. Wir setzen $C = 0$ und $D > 0$. Die Wigner'schen Sättigungsbedingungen sind erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind in den Abb. 8 und 8 a gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt.

$$V_{T,g} = - 1500 A e^{-r/0,1544} \quad (45a)$$

$$V_{S,g} = 4 A e^{-r/0,1544} - 1500 A e^{-r/0,1544} \quad (45b)$$

$$V_{T,ug} = 500 A e^{-r/0,1544} \quad (45c)$$

$$V_{S,ug} = 4A e^{-r/0,1544} + 4500 A e^{-r/0,1544} \quad (45d)$$

$$V_W = 2 A e^{-r/1,544} + 500 A e^{-r/0,1544} \quad (46a)$$

$$V_M = - 2000 A e^{-r/0,1544} \quad (46b)$$

$$V_H = 1000 A e^{-r/0,1544} \quad (46c)$$

$$V_B = - 2 A e^{-r/1,544} - 1000 A e^{-r/0,1544} \quad (46d)$$

Für alle Werte von r bleibt $V_{T,g}$ anziehend. Bis zu $1,2 F$ ist $V_{S,g}$ auch anziehend, und für $r > 1,2 F$ abstoßend. $V_{T,ug}$, $V_{S,ug}$, V_W und V_H sind für alle r abstoßend, V_M und V_B anziehend. Für $r > 1,5 F$,

$$|V_W + V_B| = (1/2) |V_M + V_H|.$$

$V_W + V_B$ und $V_M + V_H$ sind für alle r anziehend.

Fall $n = -10$:

Auf der Abb. 6 ist zu sehen, daß ein $n = -10$ entsprechender Wert von m nur bei der Kurve $\beta = (0,1691)^{-1} F^{-1}$ vorhanden ist. Für $n = -10$, $\beta = 1/0,1691 F^{-1}$ bekommen wir $m = 5000$.

Wir setzen $C = 3 D$.

Normalerweise nimmt man bis zu einer bestimmten Reichweite die Werte von $A e^{-\alpha r}$, $B e^{-\alpha r}$, $C e^{-\beta r}$ und $D e^{-\beta r}$ als fest an, und prüft, ob diese Werte den Wigner'schen Sättigungsbedingungen genügen (Siehe Bt. 1 Seite 150 und 162 für Äusserungen über diese Bedingungen). Übrigens sind diesmal nicht alle Wigner'schen Sättigungsbedingungen erfüllt, obwohl schon die Bedingung $A > 0$ für die Sättigung von Kernmaterie hinreichend ist. Statt $(A + B) e^{-\alpha r} > 0$, haben wir $(A + B) e^{-\alpha r} < 0$ für alle r . Für $r > 1,24 F$ haben wir $\{(A + B) e^{-\alpha r} + (C + D) e^{-\beta r}\} < 0$.

Die entsprechenden Potentiale sind in den Abb. 9 und 9a gezeichnet, und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = (8/3)A e^{-r/1,691} - 5000 A e^{-r/0,1691} \quad (47a)$$

$$V_{S,g} = 12 A e^{-r/1,691} \quad (47b)$$

$$V_{T,ug} = (8/3)A e^{-r/1,691} + (5000/3)A e^{-r/0,1691} \quad (47c)$$

$$V_{S,ug} = 12 A e^{-r/1,691} \quad (47d)$$

$$V_W = (14/3)A e^{-r/1,691} - (5000/6)A e^{-r/0,1691} \quad (48a)$$

$$V_M = (-5000/3)A e^{-r/0,1691} \quad (48b)$$

$$V_H = (-5000/3)A e^{-r/0,1691} \quad (48c)$$

$$V_B = (-22/3 A) e^{-r/1,691} - (5000/6)A e^{-r/0,1691} \quad (48d)$$

Für alle Werte von r bleibt $V_{T,g}$ anziehend; $V_{S,g}$ und $V_{S,ug}$ bleiben abstoßend. Für $r < 1,25 F$ ist $V_{T,ug}$ abstoßend, für $r > 1,25 F$ anziehend. V_W ist anziehend für $r < 0,98 F$, und für weitere Werte von r abstoßend. V_M , V_H und V_B bleiben anziehend für alle r . Für $r > 1,2 F$, $|V_B + V_W| > |V_M + V_H|$.

Wir werden jetzt den Fall $\alpha > \beta$, und zwar speziell $\alpha = 2\beta$ betrachten.

Es ist klar, daß jetzt die Austauschkräfte nicht schneller abfallen als die Wignerkraft. Wenn wir solche $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ suchen, die für alle r anziehend sind, dann müssen die Parameter m und n , den folgenden zwei Bedingungen genügen:

$$m > 0 \text{ und } (8 - m)/2 \leq n \leq (m - 2).$$

Diese Bedingungen lassen sich leicht aus den Gleichungen 42 a und 42 b ableiten.

Solche Werte von m und n , die auf den, durch das schraffierte Gebiet in Abb. 5, hindurchgehender Kurvenstücken liegen, genügen beiden Bedingungen. Wir werden jetzt drei derartige Fälle beschreiben, wo $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ beide überall anziehend sind. Danach werden wir einige Fälle beschreiben, in denen das nicht gilt.

$m = 5,2$: Für $m = 5,2$ und $\beta = 1/1 F^{-1}$, bekommen wir aus der Abb. 5 $n = 2$. Wir setzen $C = 0,6666 A$.

Die Wigner'schen Sättigungsbedingungen sind erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind in der Abb. 10 und 10 a gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = 1,3333 A e^{-2r} - 3,0665 A e^{-r} \quad (49a)$$

$$V_{S,g} = - 0,4001 A e^{-r} \quad (49b)$$

$$V_{T,ug} = (4/3) A e^{-2r} + (9,2/9) A e^{-r} \quad (49c)$$

$$V_{S,ug} = + 1,2 A e^{-r} \quad (49d)$$

$$V_W = 0,6666 A e^{-2r} - 0,3111 A e^{-r} \quad (50a)$$

$$V_M = - 1,4220 A e^{-r} \quad (50b)$$

$$V_H = - 0,6222 A e^{-r} \quad (50c)$$

$$V_B = 0,6666 A e^{-2r} - 0,7110 A e^{-r} \quad (50d)$$

Für alle r bleiben $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ anziehend, $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ abstoßend. $|V_{T,g}| > |V_{S,g}|$.

Bis zu $0,8 F$ bleibt V_W abstoßend, wird aber anziehend für $r > 0,8 F$. V_M , V_H und V_B sind anziehend für alle r . Für $r > 1,4 F$ $|V_M + V_H| \approx 2,7 |V_W + V_B|$.

m = 17,6: Für m = 17,6 und $\beta = 1/1,5 \text{ F}^{-1}$ erhalten wir n = 2. Wiederum setzen wir C = 0,6666 A. Die Wigner'schen Sättigungsbedingungen sind erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind in der Abb. 11, 11a und 11b gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = 1,3333 \text{ A } e^{-2r/1,5} - 7,2 \text{ A } e^{-r/1,5} \quad (51a)$$

$$V_{S,g} = -4,533 \text{ A } e^{-r/1,5} \quad (51b)$$

$$V_{T,ug} = 1,333 \text{ A } e^{-2r/1,5} + (7,2/3) \text{ A } e^{-r/1,5} \quad (51c)$$

$$V_{S,ug} = 13,6 \text{ A } e^{-r/1,5} \quad (51d)$$

$$V_W = (2/3) \text{ A } e^{-2r/1,5} + (3,2/3) \text{ A } e^{-r/1,5} \quad (52a)$$

$$V_M = (-20,8/3) e^{-r/1,5} \text{ A} \quad (52b)$$

$$V_H = (6,4/3) e^{-r/1,5} \text{ A} \quad (52c)$$

$$V_B = (2/3) e^{-2r/1,5} \text{ A} - (10,4/3) e^{-r/1,5} \text{ A} \quad (52d)$$

Für alle r bleiben $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ anziehend, $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ abstoßend; $|V_{T,g}| > |V_{S,g}|$.

Aus zwei Gründen ist dieser Fall dem ersten (m = 5,2) vorzuziehen. Erstens sind die Abfallraten von $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ fast gleich; zweitens ist das Verhältnis

$$\left| \frac{V_{T,g}}{V_{S,g}} \right|_{r=0} = 1,294 \text{ viel vernünftiger, als das vorherige}$$

$$\left| \frac{V_{T,g}}{V_{S,g}} \right| = 4,33. \text{ Der Wert } 1,294 \text{ liegt nah zu dem Wert}$$

1,362, der von Hulthén und Sugawara (Hu. 1) zitiert wird.

Für alle r bleiben V_W und V_H abstoßend, V_M und V_B anziehend. Für $r > 2,0 F$ $|V_M + V_H| \approx 2,3 |V_B + V_W|$.

$m = 4,25$: Für $m = 4,25$ und $\beta = (1/0,9) F^{-1}$ erhalten wir $n = 1/2$. Wir setzen $C = -(1/12) A$. Außer der Bedingung $(A e^{-\alpha r} + C e^{-\beta r}) > 0$ sind diesmal alle anderen Wigner'schen Bedingungen erfüllt. Für $r > 2,237 F$ haben wir $(A e^{-\alpha r} + C e^{-\beta r}) < 0$.

Die entsprechenden Potentiale sind in den Abb. 12, 12a und 12b gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = (5/6) A e^{-2r/0,9} - (5/4) A e^{-r/0,9} \quad (53a)$$

$$V_{S,g} = (3/2) A e^{-2r/0,9} - (19/12) A e^{-r/0,9} \quad (53b)$$

$$V_{T,ug} = (5/6) A e^{-2r/0,9} + (5/12) A e^{-r/0,9} \quad (53c)$$

$$V_{S,ug} = (3/2) A e^{-2r/0,9} + (19/14) A e^{-r/0,9} \quad (53d)$$

$$V_W = (7/6) A e^{-2r/0,9} + (7/12) e^{-r/0,9} A \quad (54a)$$

$$V_M = -2 A e^{-r/0,9} \quad (54b)$$

$$V_H = (7/6) A e^{-r/0,9} \quad (54c)$$

$$V_B = -(2/6) A e^{-2r/0,9} - A e^{-r/0,9} \quad (54d)$$

Für alle r bleiben $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ anziehend, $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ abstoßend. Das Interessante dabei ist, daß

$V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ um $r = 0$ negative Neigungen besitzen, und darum um $r = 0,35 F$ bzw. $r = 0,6 F$ ein Minimum haben.

Für alle r bleiben V_W und V_H abstoßend, V_M und V_B anziehend. Für $r > 2 F$, $|V_M + V_H| \approx 1,5 |V_B + V_W|$.

Wir werden jetzt einen Fall betrachten, wo $V_{S,g}$ für kleinere Entfernungen abstoßend und für größere Entfernungen anziehend ist.

$m = 4,25$: Für $m = 4,25$ und $\beta = 1/0,9 F^{-1}$ erhalten wir $n = 1/2$. Wir setzen $C = 0,1666 A$.

Die Wigner'schen Bedingungen sind erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind in den Abb. 13, 13a und 13b gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = (5/6)A e^{-2r/0,9} - (1,75)A e^{-r/0,9} \quad (55a)$$

$$V_{S,g} = (3/2)A e^{-2r/0,9} - (1,0833)A e^{-r/0,9} \quad (55b)$$

$$V_{T,ug} = (5/6)A e^{-2r/0,9} + (3,5/6)A e^{-r/0,9} \quad (55c)$$

$$V_{S,ug} = (3/2)A e^{-2r/0,9} + (3,25)A e^{-r/0,9} \quad (55d)$$

$$V_W = (7/6)A e^{-2r/0,9} + (1,5/6)A e^{-r/0,9} \quad (56a)$$

$$V_M = - (1,25)A e^{-r/0,9} \quad (56b)$$

$$V_H = (0,5)A e^{-r/0,9} \quad (56c)$$

$$V_B = - (1/3)A e^{-2r/0,9} - (2,5/3)A e^{-r/0,9} \quad (56d)$$

Für alle r bleibt $V_{T,g}$ anziehend, $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ abstoßend. Für $r < 0,3 F$ bleibt $V_{S,g}$ abstoßend, für $r > 0,3$ anziehend. $|V_{T,g}| > |V_{S,g}|$.

Für alle r bleiben V_W und V_H abstoßend, V_M und V_B anziehend. Für $r > 2 F$ $|V_M + V_H| \approx 1,5 |V_B + V_W|$.

Wir werden jetzt den Fall betrachten, wo für kleinere Entfernungen $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ beide abstoßend und für größere Entfernungen anziehend sind.

$m = 2$: Für $m = 2$ und $\beta = 1/0,6 F^{-1}$ erhalten wir $n = 1/2$. Wir setzen $C = 0$. Die Wigner'schen Sättigungsbedingungen sind erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind in den Abb. 14, 14a und 14b gezeichnet und in den folgenden Ausdrücken dargestellt:

$$V_{T,g} = 0,8333 A e^{-2r/0,6} - 0,6666 A e^{-r/0,6} \quad (57a)$$

$$V_{S,g} = 1,5 A e^{-2r/0,6} - 0,6666 A e^{-r/0,6} \quad (57b)$$

$$V_{T,ug} = 0,8333 A e^{-2r/0,6} + (2/9) A e^{-r/0,6} \quad (57c)$$

$$V_{S,ug} = 1,5 A e^{-2r/0,6} + 2 A e^{-r/0,6} \quad (57d)$$

$$V_W = 1,1666 A e^{-2r/0,6} + 0,2222 A e^{-r/0,6} \quad (58a)$$

$$V_M = - 0,8888 A e^{-r/0,6} \quad (58b)$$

$$V_H = 0,4444 A e^{-r/0,6} \quad (58c)$$

$$V_B = - 0,3333 A e^{-2r/0,6} - 0,4444 A e^{-r/0,6} \quad (58d)$$

Für $r < 0,15 F$ ist $V_{T,g}$ abstoßend, für $r > 0,15 F$ anziehend. Für $r < 0,5 F$ ist $V_{S,g}$ abstoßend, für $r > 0,5 F$ anziehend. $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ sind abstoßend für alle r .

Für $r < 0,35 F$, $|V_{S,g}| > |V_{T,g}|$; Für $0,35 F < r < 2 F$ $|V_{T,g}| > |V_{S,g}|$; Für $r > 2 F$, $|V_{T,g}| \approx |V_{S,g}|$.

Für alle r sind V_W und V_H abstoßend, V_M und V_B anziehend. Für $r > 1,5 F$ $|V_M + V_H| \approx 2 |V_B + V_W|$.

IV. Diskussion der Ergebnisse.

Bevor wir an die Besprechung der Potentiale gehen, die wir im vorigen Abschnitt beschrieben, müssen wir auf den gegenwärtigen Zustand der Theorie der Zweikörperwechselwirkung eingehen. Die Wechselwirkung soll sowohl die verfügbaren experimentellen Ergebnisse über Nukleon - Nukleon Streuung und Polarization erklären, als auch Sättigung liefern. In der vorliegenden Arbeit haben wir im wesentlichen mit der Erfüllung der Sättigungsbedingung zu tun, und werden darauf in der Diskussion besonderen Nachdruck legen.

Der differentielle Proton - Neutron Wirkungsquerschnitt, den wir mit σ_{np} bezeichnen wollen, ist für Energien bis 15 Mev isotrop. (Hier und im folgenden soll sich die Isotropie stets auf den Streuwinkel ϑ im Schwerpunktsystem beziehen, und die Energie soll die des einfallenden Neutrons bzw. Protons im Laborsystem sein). Die Isotropie bei diesen Energien läßt sich sowohl durch reine anziehende Kräfte ohne Austauschigenschaften, oder durch reine Austauschkräfte, oder auch durch eine Mischung beider, welche Sättigung liefert, erzielen ($|V_M| = 4 |V_W|$). Man braucht dafür nicht notwendig eine Serber-Kraft ($(1/2)V(1 + P^M)$) anzunehmen. Für Energien zwischen

30 und 90 Mev ist σ_{np} symmetrisch um $\vartheta = \pi/2$ mit Maxima in der Vorwärts- ($\vartheta = 0$) und Rückwärtsrichtung ($\vartheta = \pi$).

Um das zu erklären, wurde bekanntlich die Serber-Kraft vorgeschlagen. Die Serber-Kraft verschwindet in Zustände ungerader Parität und erzeugt so die Symmetrie des Streuquerschnitts um $\vartheta = \pi/2$. Zu der Zeit, als diese Wechselwirkung vorgeschlagen wurde, waren P-Wellen Effekte in der Proton-Proton Streuung nicht beobachtet worden, und dieses schien Serbers Hypothese zu bestätigen. Aber heute hat man diese Annahme aus einer Anzahl wichtiger Gründe aufgegeben, auf die wir jetzt eingehen wollen.

1.) Bereits bei 90 Mev ist σ_{np} nicht mehr genau symmetrisch und für wachsende Energie geht die Symmetrie weiter verloren. Für hohe Energie fehlt sie völlig und die Rückwärtsstreuung überwiegt.

2.) Der Kernanteil des differentiellen Wirkungsquerschnitts σ_{pp} für p - p Streuung ist isotrop für Energien bis 450 Mev. Für Winkel unter 10° überwiegt die Coulombstreuung. Zwischen 10° und 20° sinkt der Wirkungsquerschnitt wegen Interferenz zwischen Coulomb- und Kernkräften. Für $\vartheta > 20^\circ$ kann man den Coulombanteil an Streuquerschnitt gegenüber dem Kernanteil vernachlässigen. Bisher hat sich die Annahme der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte stets bewährt (Hu. 1, Seite 126).

Das bedeutet, daß die Serberkraft, die man zur Erklärung der $n - p$ Streuung zwischen 30 - 90 Mev benutzt, auch die $p - p$ Daten wiedergeben muß. Offensichtlich kann der Serber-Ansatz das nicht leisten.

3.) Die $p - p$ Streuexperimente zeigen, daß die Polarisation ausschließlich von ungeraden Zuständen herrührt, und die Phasenanalyse ergibt negative Phasenverschiebungen für ungerade Zustände. Das bedeutet, daß das Potential in ungeraden Zuständen abstoßend ist. Neuere Phasenanalysen von $n - p$ Streuexperimenten zeigen, daß das Potential in ungeraden Zuständen nicht verschwindet. Das widerspricht vollkommen der Serberkraft.

4.) Leider gibt die Serberkraft bekanntlich auch keine Absättigung.

Es sei noch erwähnt, daß Christian und Noyes (Ch.1) versucht haben, die $p - p$ Streudaten an eine Serberkraft + rein anziehenden Potential anzupassen. Obwohl dies ungefähr zur sphärischen Symmetrie der Streuung für den mittleren Winkelbereich führt, ist jedoch die Größenordnung zu klein, als daß damit die Experimente erklärt werden können.

Nachdem wir die Nachteile der Serberkraft diskutiert haben, wenden wir uns jetzt anderen Annahmen über das Zweikörperpotential zu. Die Tensorkraft, die Christian und Noyes (Ch. 2) vorgeschlagen haben, liefert anisotrope $p - p$ Streuung. In dieser Arbeit

wird die Annahme der Ladungsunabhängigkeit nicht berücksichtigt.

Die Spin-Bahn-Koppelung ($\vec{L} : \vec{S}$ Kraft), die Case und Pais (Ca. 1) vorgeschlagen haben, gibt ebenfalls anisotrope p - p Streuung.

Der Potentialtyp mit "hard core", den Jastrow (Ja. 1) vorgeschlagen hat, gibt Isotropie für p - p Streuung. und liefert Sättigung. Aber dieser Typ hat zu kleine Werte des p - p Polarisationsgrades bei hohen Energien zur Folge. Dasselbe gilt für die Spin-Bahn-Kraft von Case und Pais. Nur die Tensorkraft von Christian und Noyes ergibt gute Übereinstimmung mit den Polarisationsexperimenten.

Gammel, Christian und Thaler (Ga. 1) haben ein phänomenologisches Potential angegeben, um die Streudaten bei mittleren und hohen Energien zu erklären. Dieses Potential enthält einen "hard core", der auch für Sättigung sorgt. Laurikainen (La. 1) berichtet, daß die Anpassung der Randbedingungen des Deuterons an dieses Potential zu Schwierigkeiten führt, und daß man einen falschen Wert für die Bindungsenergie des Deuterons bekommt.

Wir werden jetzt die Vorzüge und Nachteile der Potentiale der Abbildungen 7 bis 14 behandeln. Allen ist gemeinsam, daß sie Sättigung ergeben.

Fall $\beta > 1$; $\beta = 10$

1) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 43 bis 44 gehört und in den Abbildungen 7, 7a gezeichnet ist:

Die Vorteile in dieser Gruppe sind:

$V_{T,g}$ ist für alle r anziehend und man sollte es erwarten, daß es bei geeigneter Anpassung, die richtige Größenordnung der Bindungsenergie des Deuterons liefert. $V_{T,ug}$ ist für alle r abstoßend.

$V_{T,g}$ und $V_{T,ug}$ sollten nach geeigneter Anpassung die richtige Tripletstreuung ergeben.

Ich will hier auf einen Punkt besonders hinweisen.

Die Bartlett-Kraft tauscht nur die Spinkoordinaten, während die Heisenberg-Kraft Spin und Ort vertauscht.

Wenn wir die Symmetrie von σ_{np} betrachten, wie wir es bei der Serber-Kraft hatten, müssen wir daher die Terme

$V_W + V_B$ und $V_M + V_H$, und nicht V_W , V_M , V_H und V_B für sich allein betrachten.

$V_W + V_B$ und $V_M + V_H$ sind überall anziehend. Für $r > 1,5 F$, $|V_M + V_H| = 2 |V_W + V_B|$. Diese Beziehung zeigt, daß die Größe der Austauschkräfte, die Rückwärtsstreuung hervorrufen, nicht viel größer ist, als die der Kräfte, welche die Vorwärtsstreuung verursachen. Die dadurch hervorgerufene Asymmetrie in der $n - p$ Streuung für 30 - 90 Mev wird innerhalb

vernünftigen Grenzen liegen. Auch mit diesem niedrigen Wert für das Verhältnis $\left| \frac{V_M + V_H}{V_W + V_B} \right|$ ($= 2$) konnten wir Sättigung erzielen. Das ist eine Verbesserung gegenüber der üblichen Sättigungsmischung von $|V_M/V_W| = 4$. Wir haben die folgenden Nachteile:

$V_{S,g}$ ist für alle r abstoßend. Es sollte anziehend sein, aber nicht so stark, daß es einen gebundenen Zustand gibt. Die Singulettstreuung wird nicht mit dem Experiment übereinstimmen.

2.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 45 - 46 gehören und in den Abbildungen 8, 8a gezeichnet sind:

Diese Gruppe hat dieselben Vorteile, wie die obige Gruppe. Wir haben dagegen den Nachteil, daß $V_{S,g}$ zwar für kleinere Entfernungen anziehend ist, für größere r aber abstoßend wird. Die Singulettstreuung wird nicht mit dem Experiment übereinstimmen.

3.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 47 - 48 gehören und in den Abbildungen 9, 9a gezeichnet sind:

Die Vorteile in dieser Gruppe sind:

$V_{T,g}$ ist für alle r anziehend und man sollte es erwarten, daß es bei geeigneter Anpassung die richtige Größenordnung der Bindungsenergie des Deuterons liefert.

Interessanterweise ist rechts von $r > 1,2 F$,

$|V_W + V_B| > |V_M + V_H|$. Dies hat zur Folge, daß die Asymmetrie der $n - p$ Streuung für 30 - 90 Mev wieder gering ist, und daß das Symmetriezentrum wahrschein-

lich links von $\vartheta = \pi/2$ liegt, im Gegensatz zu den beiden vorigen Fällen, wo es rechts von $\vartheta = \pi/2$ liegen wird.

Die Nachteile in dieser Gruppe sind:

$V_{S,g}$ ist abstoßend für alle r und die Singulettstreuung wird nicht mit dem Experiment übereinstimmen.

$V_{T,ug}$ ist für klein r abstoßend, und für größere Werte von r anziehend, wo es fast dieselbe Größe, wie

$V_{T,g}$ erreicht. Das ist ein erheblicher Nachteil.

Fall $\alpha > \beta$; $\alpha = 2\beta$

4.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 49 - 50 gehören und in den Abbildungen 10, 10a gezeichnet sind:

Die Vorteile sind:

$V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ sind beide anziehend für alle r .

$V_{T,ug}$ ist abstoßend für alle r . Man sollte es erwarten, daß nach geeigneter Anpassung $V_{T,g}$ und $V_{T,ug}$ die richtige Größenordnung der Triplettstreuung und der Bindungsenergie des Deuterons geben. $V_{S,g}$ wird keine Bindung geben. Für $r > 1,4$ $|V_M + V_H| \approx 2,7 |V_W + V_B|$. Dieser Wert ist nicht so gut, wie der Wert 2 der vorigen zwei Fälle ($\beta = 10\alpha; 1, 2$). Das ist immer noch eine Verbesserung gegenüber der üblichen Mischung für Sättigung, wo der Wert des Verhältnisses ($|V_M / V_W|$) 4 beträgt.

5.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 51 - 52 gehören und in den Abbildungen 11, 11a und 11b gezeichnet sind:

Die Vorteile dieser Gruppe sind dieselben, wie der obigen Gruppe. $|V_{T,g} \setminus V_{S,g}| = 1,294$, und wie auf Seite 35 erwähnt, ist dieser Wert vernünftig.

6.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 53 - 54 gehören und in den Abbildungen 12, 12a und 12 b gezeichnet sind:

Genau wie in den vorigen Fällen, kann man die Vor- und Nachteile dieser Gruppe aus den folgenden Beziehungen herleiten:

Für alle r , $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ anziehend; $V_{T,ug}$ und $V_{S,ug}$ abstoßend. Aber $|V_{T,g}| < |V_{S,g}|$. Deshalb ist dieser Fall völlig unphysikalisch. Für $r > 2f$, $|V_M + V_H| = 1,5 |V_B + V_W|$.

7.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 55 - 56 gehören und in den Abbildungen 13, 13a und 13b gezeichnet sind:

Die Vorteile sind:

Da für alle r , $V_{T,g}$ anziehend und $V_{T,ug}$ abstoßend bleibt, sollte man es erwarten, daß sie nach geeigneter Anpassung, die richtige Größenordnung der Triplettstreuung und der Bindungsenergie des Deuterons geben.

Das Interessante daran ist, daß wir die Wirkung eines $V_{S,g}$ betrachten können, das für kleines r als abstossendes Potential und für größeres r als anziehend wirkt. Für $r > 2 F, |V_M + V_H| = 1,5 |V_B + V_W|$.

8.) Die Gruppe von Potentialen, die zu den Gleichungen 57 - 58 gehören und in den Abbildungen 14, 14a und 14b gezeichnet sind:

Das Interessante hier ist, daß für kleinere Entfernungen $V_{T,g}$ und $V_{S,g}$ beide abstoßend und für größere Entfernungen anziehend sind. Für alle r ist $V_{T,ug}$ abstoßend. Nach geeigneter Anpassung sollten $V_{T,g}$ und $V_{T,ug}$ die richtige Größenordnung der Triplettstreuung und der Bindungsenergie des Deuterons ergeben.

Für $r > 1,5 F, |V_M + V_H| = 2 |V_B + V_W|$.

Die Potentiale, die zu den Abbildungen 7, 8, 11, 13, und 14 gehören, liefern Sättigung mit einem geringeren Beitrag der Austauschkräfte, als man es gewöhnlich für nötig hielt. (Wi. 1 und 2; Ro. 1; Vo. 1; Ke. 1). Abschließend können wir sagen, daß diese Potentiale in gewissen Grenzen vernünftige Ergebnisse beim Vergleich mit dem Experiment ergeben.

Ich bin Herrn Prof. Dr. F. Bopp für die Anregung zu dieser Aufgabe sehr zu Dank verpflichtet, ebenso für sein beständiges Interesse und die Förderung meiner Arbeit.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, Bonn, und dem Bayerischen Staatsministerium für Kultus und Unterricht, München, danke ich für die Gewährung von Stipendien, die mir die Ausführung meiner Arbeit ermöglichten.

V. L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s .

- (Be. 1) H. A. Bethe, Phys. Rev. 103, 1353, (1956)
- (Bt. 1) Blatt und Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics.
- (Br. 1) K. A. Brueckner, Eden und Francis, Phys. Rev.
98, 1455 (1955)
- (Br. 2) Brueckner, Levinson und Mahmoud, Phys. Rev.
95, 217 (1954)
- (Br. 3) Brueckner und Levinson, Phys. Rev. 97, 1344 (1955)
- (Br. 4) Brueckner, Phys. Rev. 97, 1353 (1955)
- (Br. 5) Brueckner, Phys. Rev. 100, 36 (1955)
- (Br. 6) Brueckner, Phys. Rev. 110, 597 (1958)
- (Br. 7) Brueckner, Phys. Rev. 103, 1121 (1956)
- (Ca. 1) Case und Pais, Phys. Rev. 80, 203 (1950)
- (Ch. 1) Christian und Noyes, Rep. Phys. Soc. Progr. Phys.
15, 68 (1952)
- (Ch. 2) Christian und Noyes, Phys. Rev. 79, 85, (1950)
- (Ed. 1) Eden, Phys. Rev. 99, 1418 (1955)
- (Ed. 2) Eden, Proc. Roy. Soc. London, A 235, 408 (1956)
- (Fe. 1) Feshbach et al, Phys. Rev. 96, 448, (1954)
- (Fr. 1) Francis und Watson, Phys. Rev. 92, 291 (1953)
- (Ga. 1) Gammel et al, Phys. Rev. 105, 311, (1957)
- (Gr. 1) A. E. S. Green und N. A. Engler, Phys. Rev.
91, 40 (1953)

- (Hu. 1) Hulthén und Sugawara, Handbuch der Physik, Bd.39
(Ja. 1) Jastrow, Phys. Rev. 81, 165, (1951)
(Ke. 1) Kemmer, Nature, 140, 193, (1937)
(La. 1) Laurikainen und Varho, Nucl. Phys. 12,606,(1959)
(Rg. 1) Rotenberg, Phys. Rev. 100, 439, (1955)
(Rg. 2) Rotenberg und Wilets, Phys. Rev. 110, 1126,(1958)
(Ro. 1) Rosenfeld, Nuclear Forces, 224
(Vi. 1) C. Villi, Nuovo Cimento, X, No. 2 (1958)
(Vo. 1) Volz, H., Zeit. für Phys. 105, 537, (1937)
(Wa. 1) Watson, Phys. Rev. 89, 575, (1953)
(Wi. 1) Wigner, Phys. Rev. 51, 106 und 947, (1937)
(Wi. 2) Breit und Wigner, Phys. Rev. 53, 998, (1938)
-

Erläuterung zu den Abbildungen:

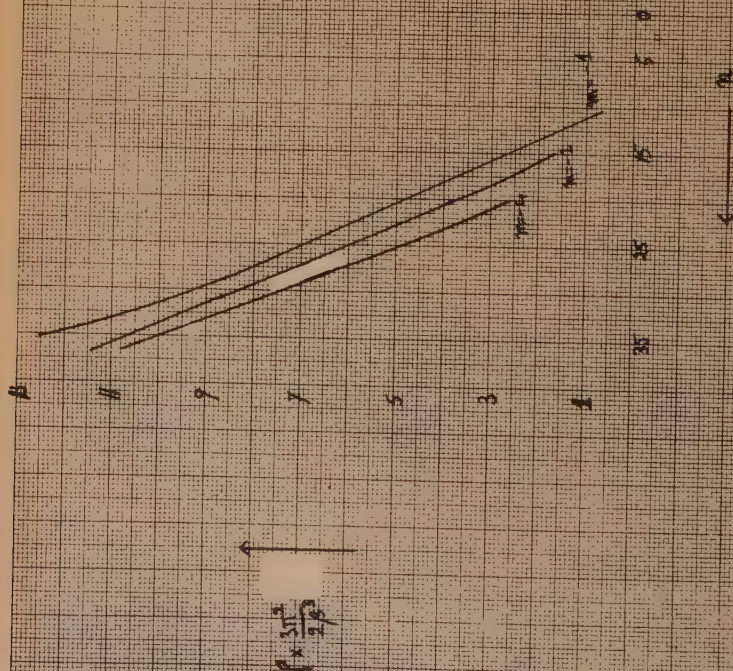
- 1) In den Abbildungen 1 bis 4 stellt ρ immer die "optimale" Dichte dar.
- 2) In den Abbildungen 7 bis 14 b bedeutet "r in Fermi" r in Einheiten von 10^{-13} cm.

$$m = (3c + 9D)/A, \quad m < 0$$

$$n = (A + 3B)/A$$

$$A\beta^2 = 500 \text{ Mev } 10^{-26} \text{ cm}^2$$

Abb. 1



$$m = (3c + 9d)/A, \quad m > 0$$

$$m = (A + 3B)/A$$

$$A \beta^{-2} = 500 \text{ MeV } 10^{16} \text{ cm}^{-1}$$

Abb. 2

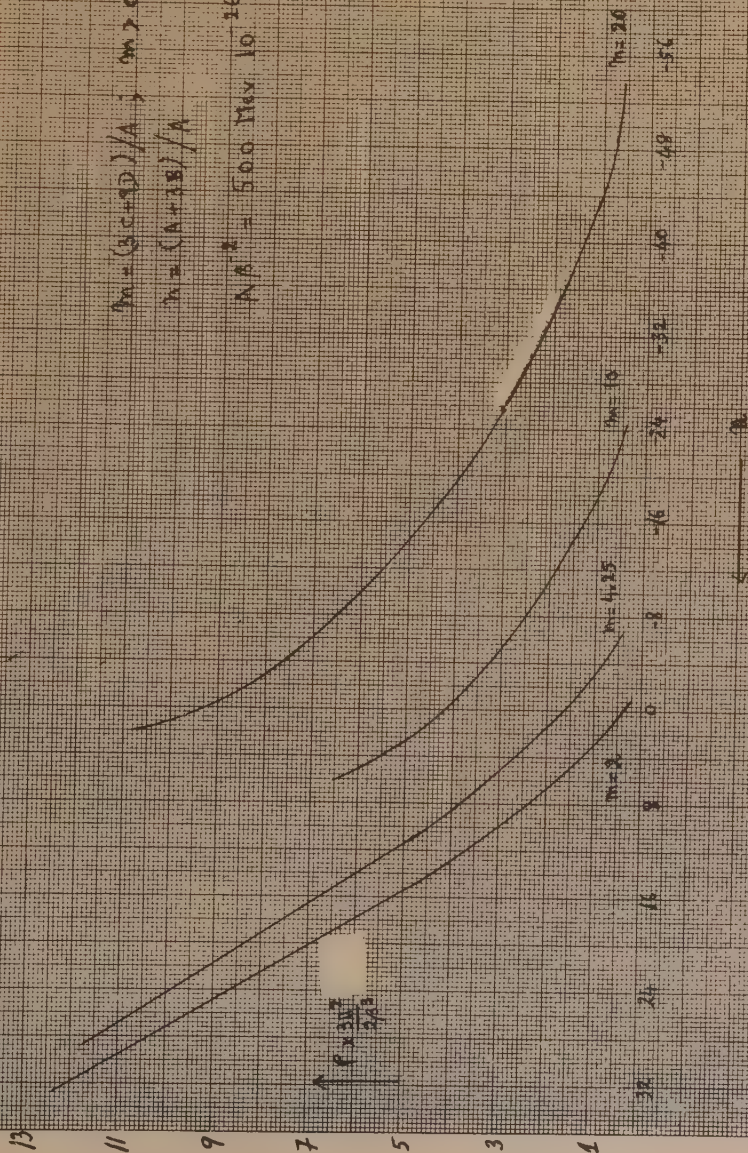
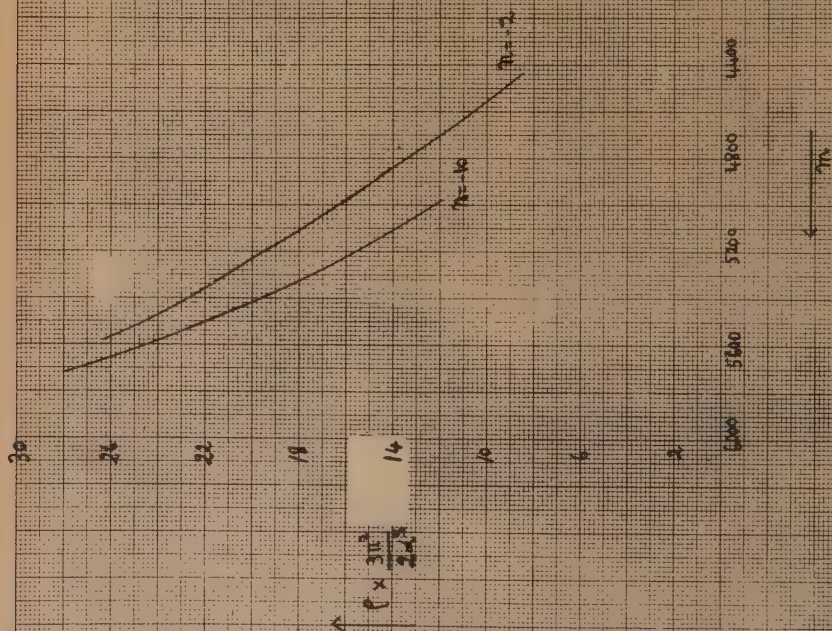


Abb. 3

$$n = (A + 3B) / A; \quad n < 0$$

$$n = (3C + 9D) / A$$

$$A \cdot 10^{-2} = 400 \text{ Mex } 10^{-26} \text{ cm}^2$$



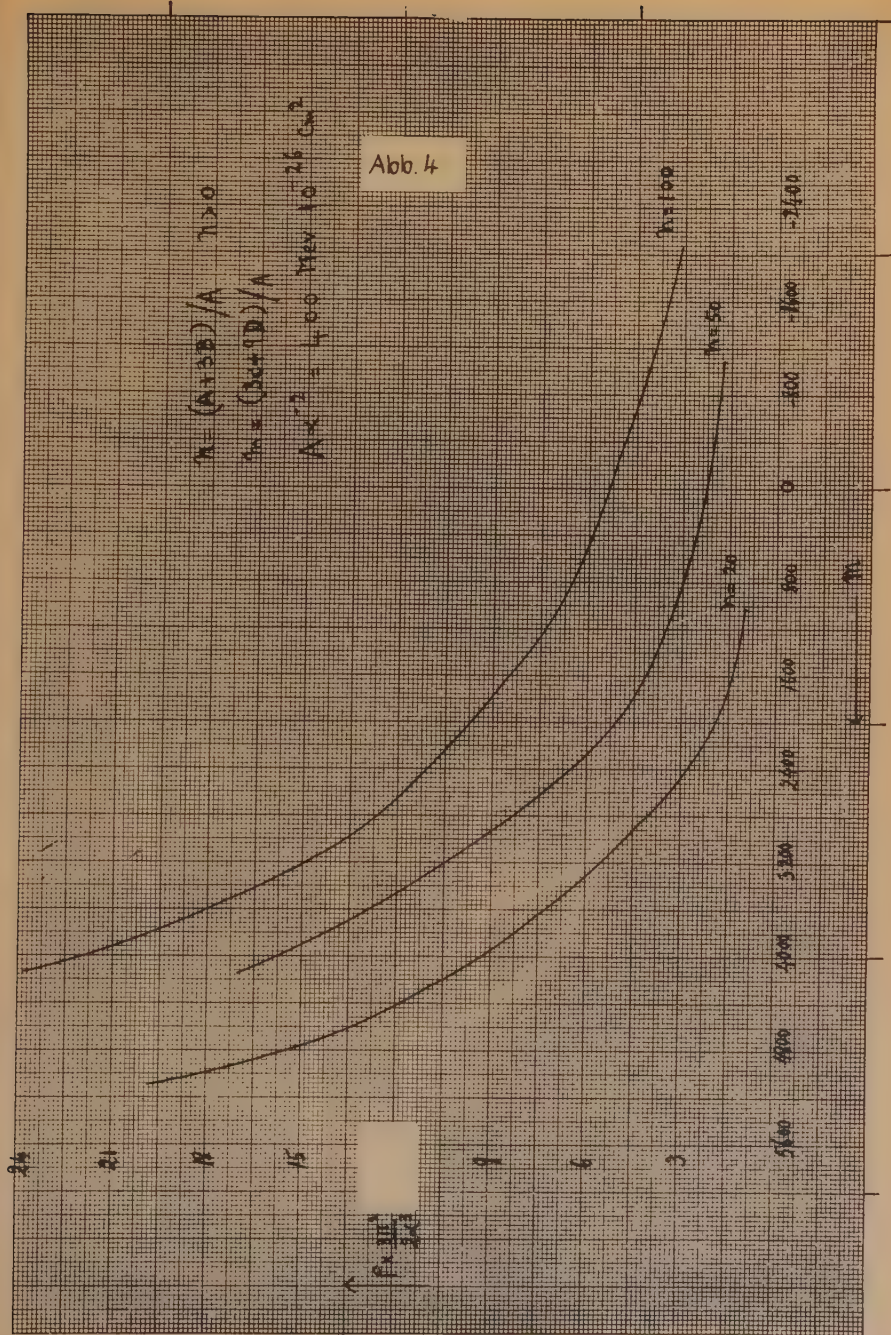


Abb. 4

$$n = \frac{(A+5B)/A}{7.20}$$

$$m = \frac{(3C+9D)/A}{7.20}$$

$$A \cdot 10^{-2} = 4.00 \text{ MeV } 10^{-26} \text{ cm}^2$$

Abb. 5

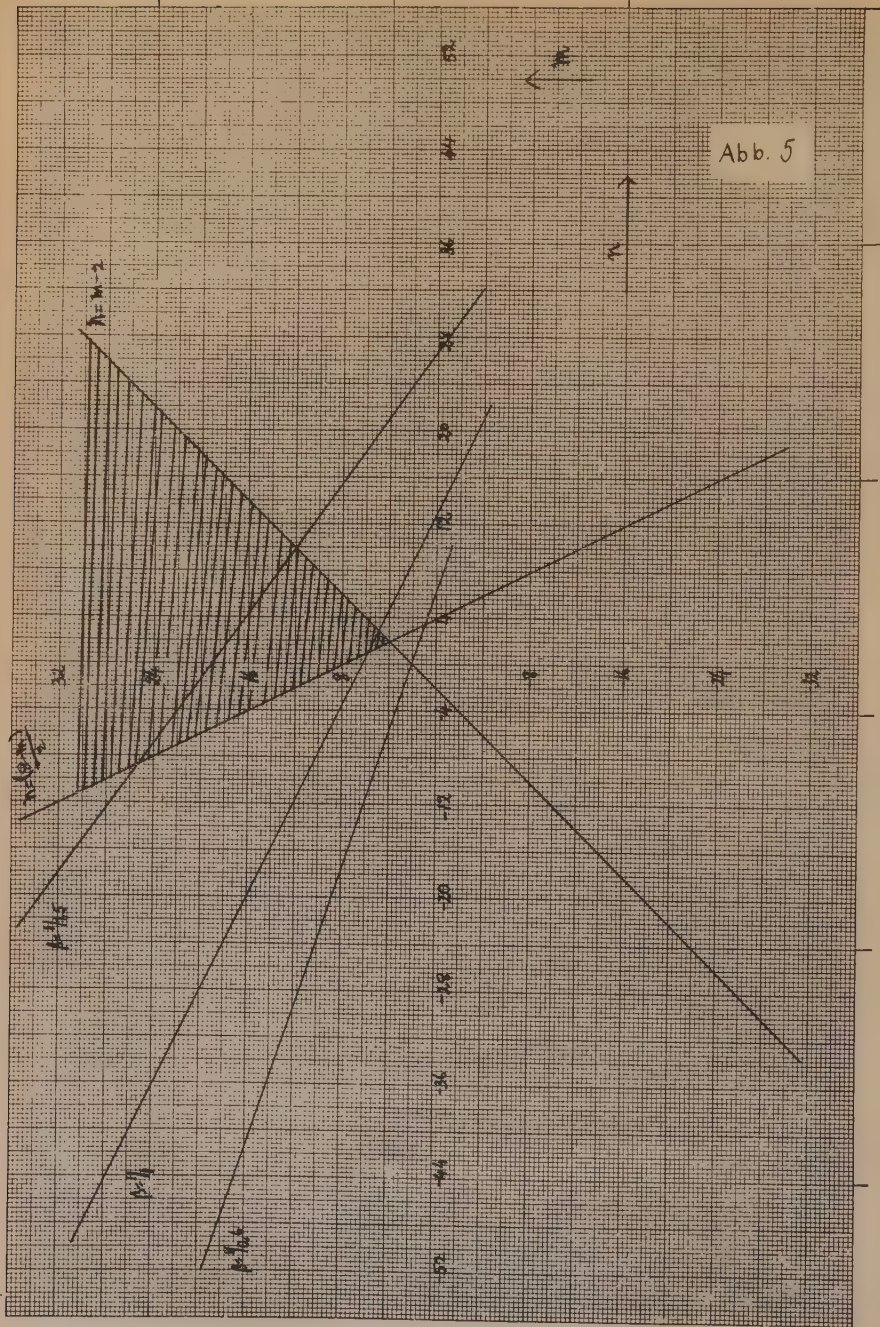


Abb. 6

$\beta = 1/0,0017 \cdot 10^{-1}$
 $A = 1/0,1177$
 $\beta' = 1/0,1323$
 $\beta = 1/0,1504$
 $\beta' = 1/0,1691$

η

$\eta = 1$

η

120

100

80

60

40

20

0

20

6084

4004

3204

2404

1604

800

0

800

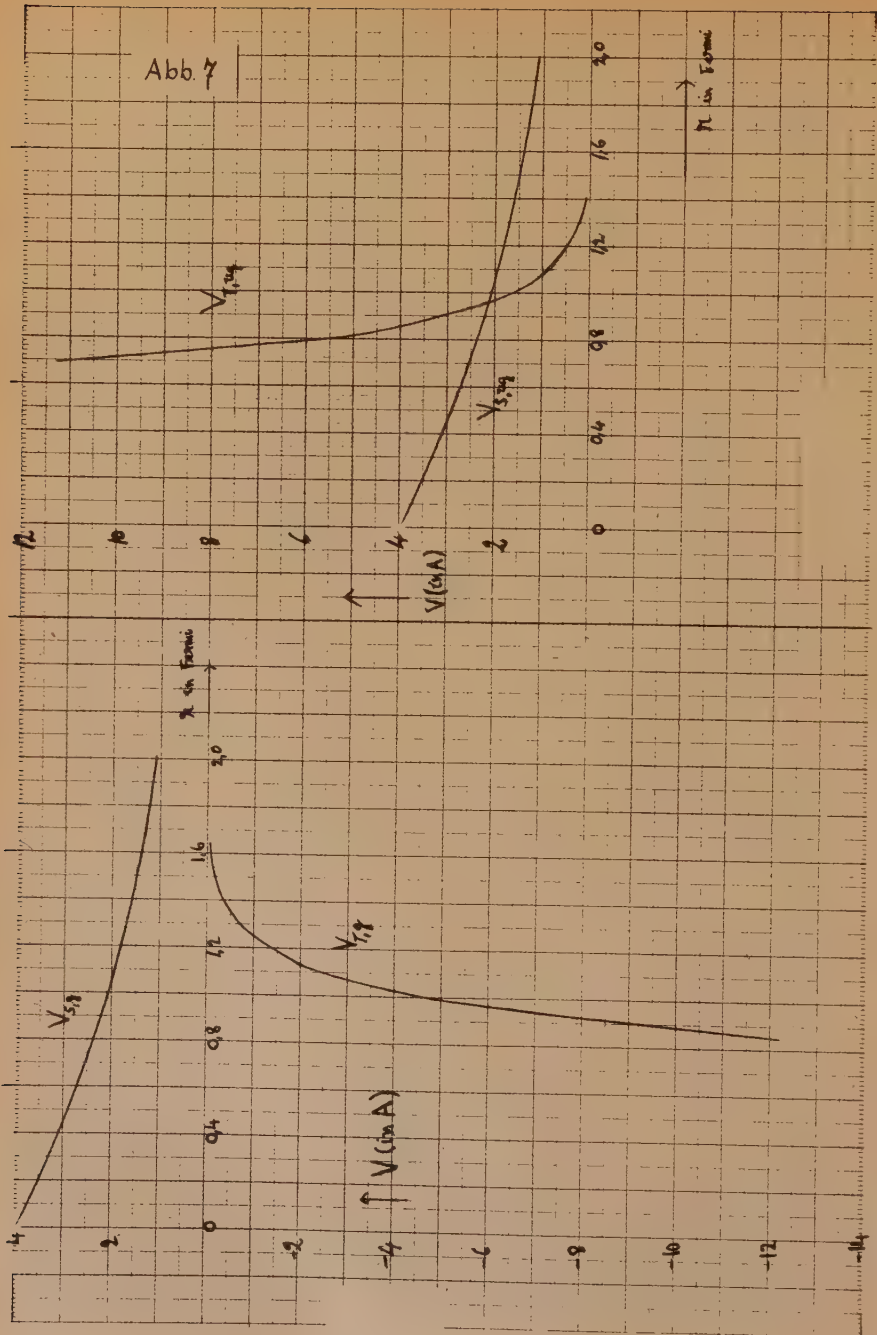
1600

2400

3200

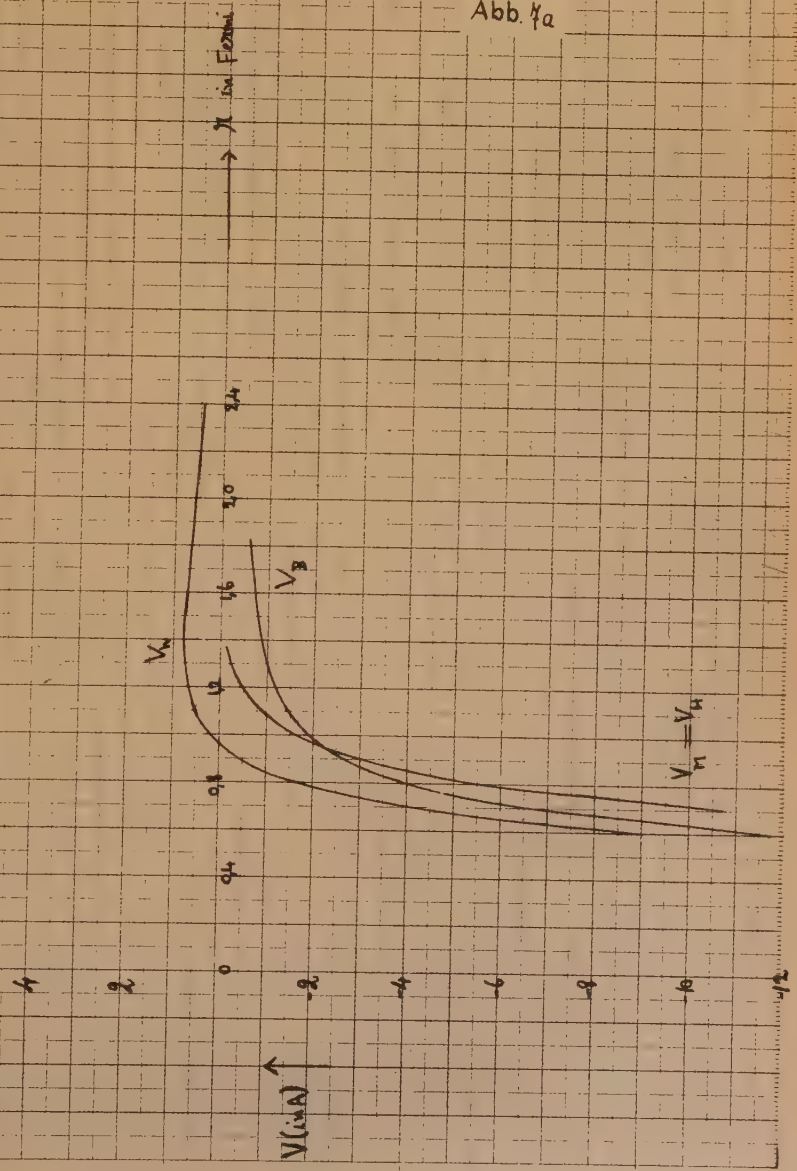
4000

4800



π in Fermi

Abb. 7a



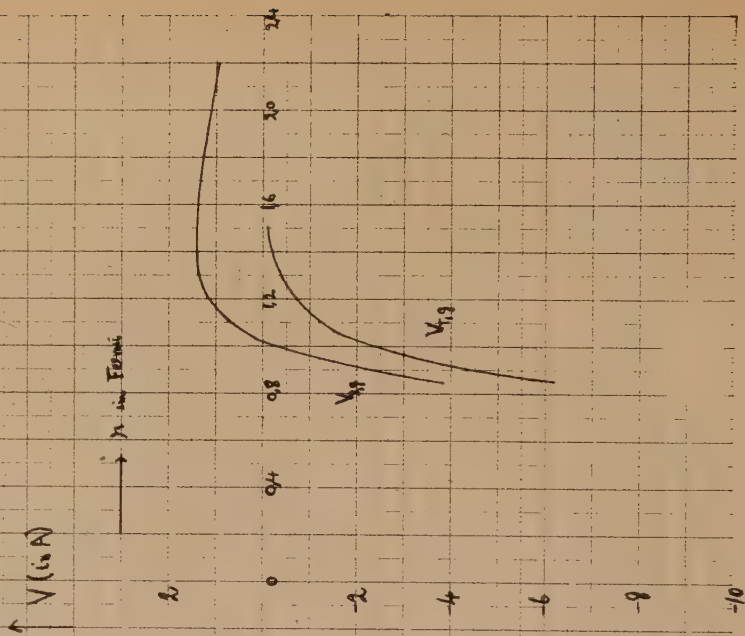
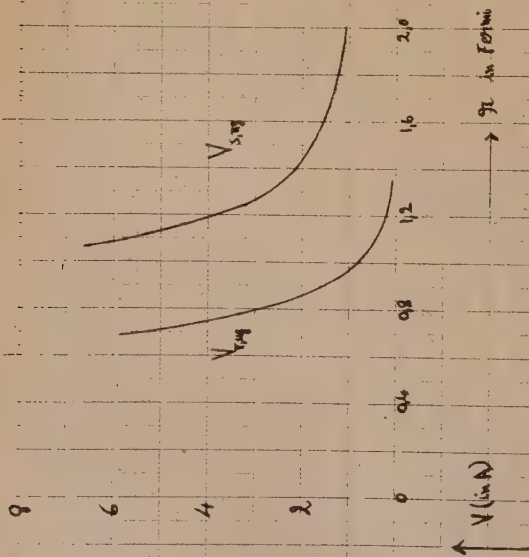


Abb. 8

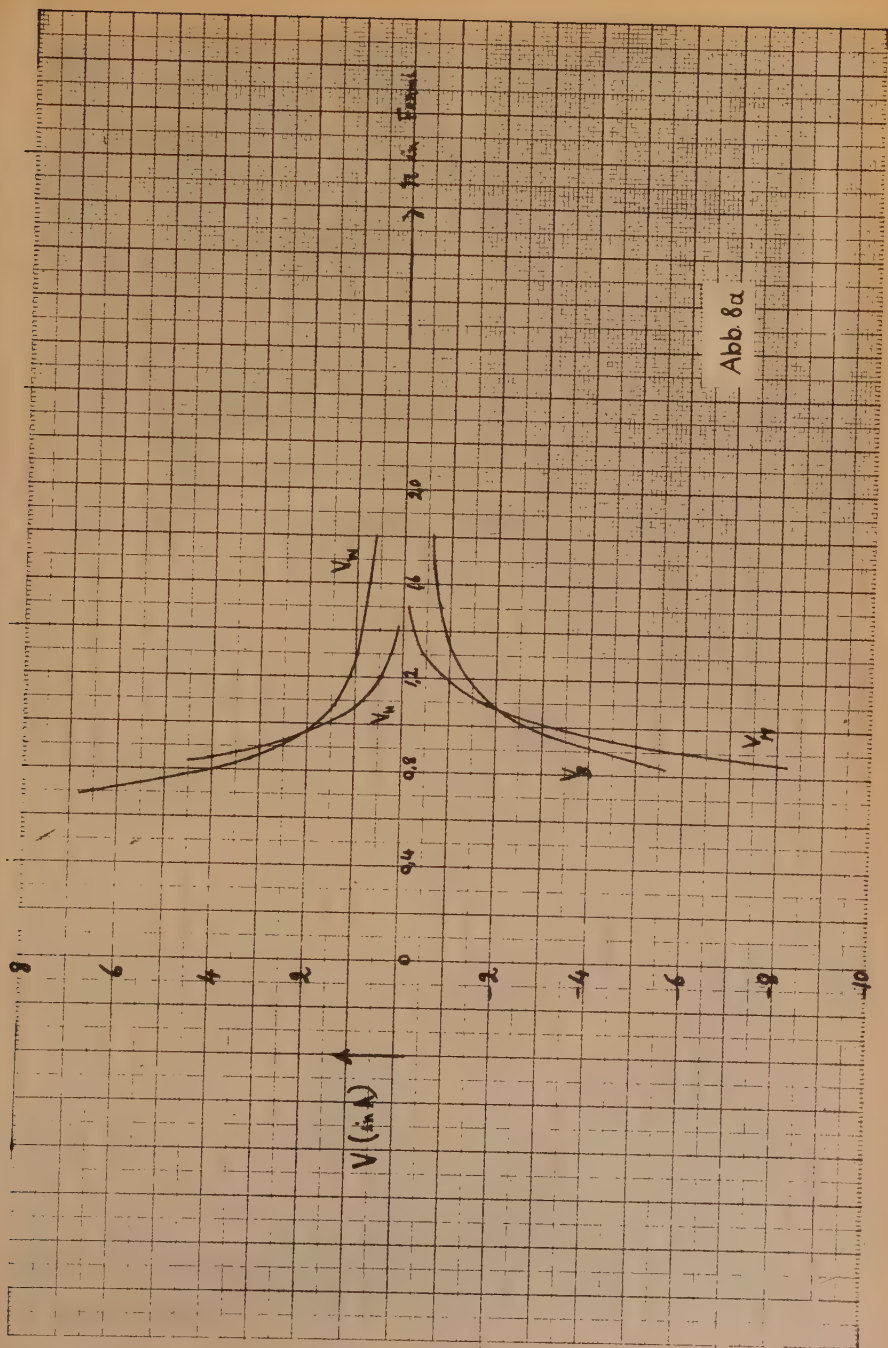


Abb. 8a

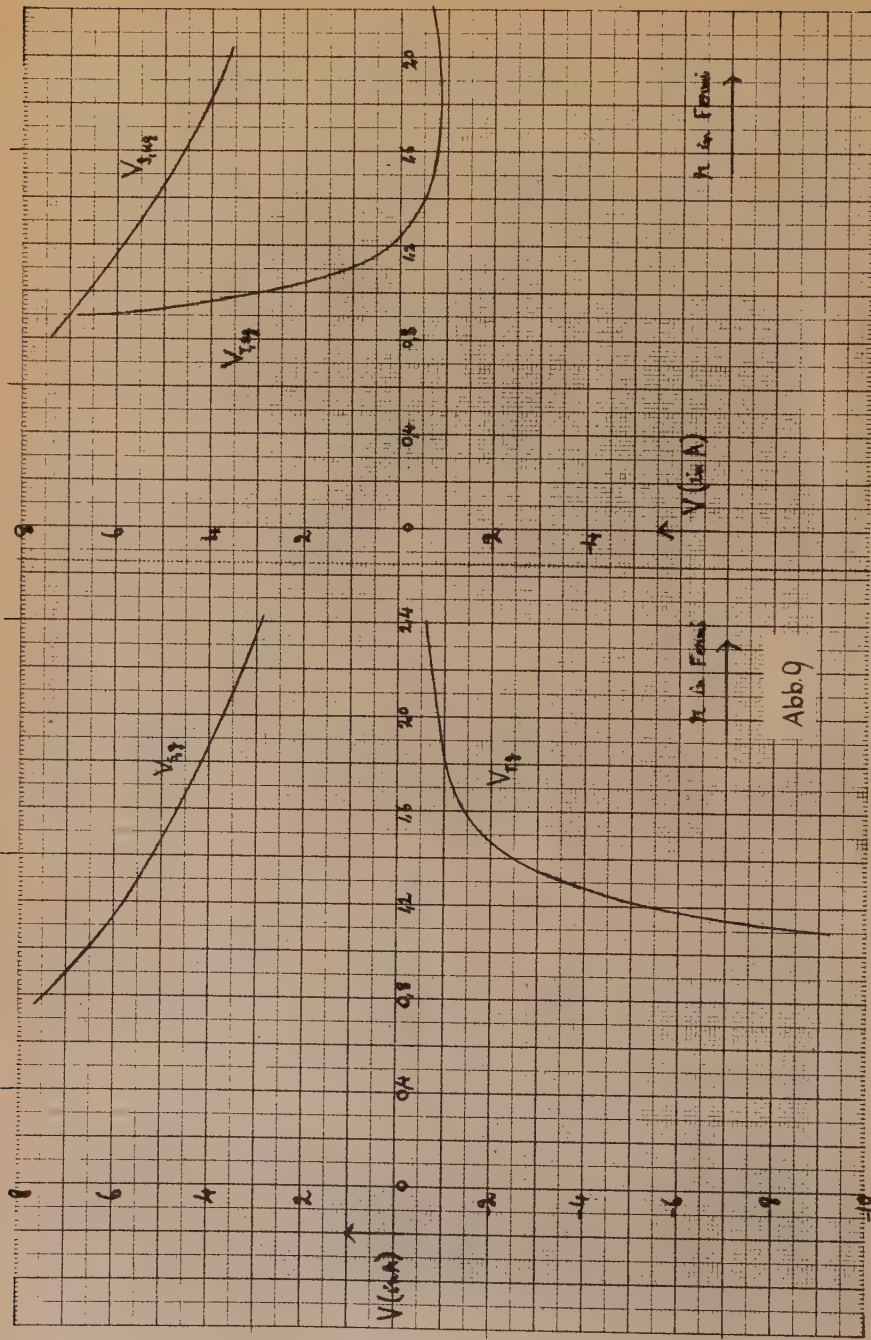


Abb. 9

1

2

0

0.4

0.8

1.2

1.6

2.0

2.4

2.8

3.2

3.6

4.0

4.4

4.8

5.2

5.6

6.0

6.4

6.8

7.2

7.6

8.0

8.4

8.8

9.2

9.6

10.0

10.4

10.8

11.2

11.6

12.0

12.4

12.8

13.2

13.6

14.0

14.4

14.8

15.2

15.6

16.0

16.4

16.8

17.2

17.6

18.0

18.4

18.8

19.2

19.6

20.0

20.4

20.8

21.2

21.6

22.0

22.4

22.8

23.2

23.6

24.0

24.4

24.8

25.2

25.6

26.0

26.4

26.8

27.2

27.6

28.0

28.4

28.8

29.2

29.6

30.0

30.4

30.8

31.2

31.6

32.0

32.4

32.8

33.2

33.6

34.0

34.4

34.8

35.2

35.6

36.0

36.4

36.8

37.2

37.6

38.0

38.4

38.8

39.2

39.6

40.0

40.4

40.8

41.2

41.6

42.0

42.4

42.8

43.2

43.6

44.0

44.4

44.8

45.2

45.6

46.0

46.4

46.8

47.2

47.6

48.0

48.4

48.8

49.2

49.6

50.0

50.4

50.8

51.2

51.6

52.0

52.4

52.8

53.2

53.6

54.0

54.4

54.8

55.2

55.6

56.0

56.4

56.8

57.2

57.6

58.0

58.4

58.8

59.2

59.6

60.0

60.4

60.8

61.2

61.6

62.0

62.4

62.8

63.2

63.6

64.0

64.4

64.8

65.2

65.6

66.0

66.4

66.8

67.2

67.6

68.0

68.4

68.8

69.2

69.6

70.0

70.4

70.8

71.2

71.6

72.0

72.4

72.8

73.2

73.6

74.0

74.4

74.8

75.2

75.6

76.0

76.4

76.8

77.2

77.6

78.0

78.4

78.8

79.2

79.6

80.0

80.4

80.8

81.2

81.6

82.0

82.4

82.8

83.2

83.6

84.0

84.4

84.8

85.2

85.6

86.0

86.4

86.8

87.2

87.6

88.0

88.4

88.8

89.2

89.6

90.0

90.4

90.8

91.2

91.6

92.0

92.4

92.8

93.2

93.6

94.0

94.4

94.8

95.2

95.6

96.0

96.4

96.8

97.2

97.6

98.0

98.4

98.8

99.2

99.6

100.0

100.4

100.8

101.2

101.6

102.0

102.4

102.8

103.2

103.6

104.0

104.4

104.8

105.2

105.6

106.0

106.4

106.8

107.2

107.6

108.0

108.4

108.8

109.2

109.6

110.0

110.4

110.8

111.2

111.6

112.0

112.4

112.8

113.2

113.6

114.0

114.4

114.8

115.2

115.6

116.0

116.4

116.8

117.2

117.6

118.0

118.4

118.8

119.2

119.6

120.0

120.4

120.8

121.2

121.6

122.0

122.4

122.8

123.2

123.6

124.0

124.4

124.8

125.2

125.6

126.0

126.4

126.8

127.2

127.6

128.0

128.4

128.8

129.2

129.6

130.0

130.4

130.8

131.2

131.6

132.0

132.4

132.8

133.2

133.6

134.0

134.4

134.8

135.2

135.6

136.0

136.4

136.8

137.2

137.6

138.0

138.4

138.8

139.2

139.6

140.0

140.4

140.8

141.2

141.6

142.0

142.4

142.8

143.2

143.6

144.0

144.4

144.8

145.2

145.6

146.0

146.4

146.8

147.2

147.6

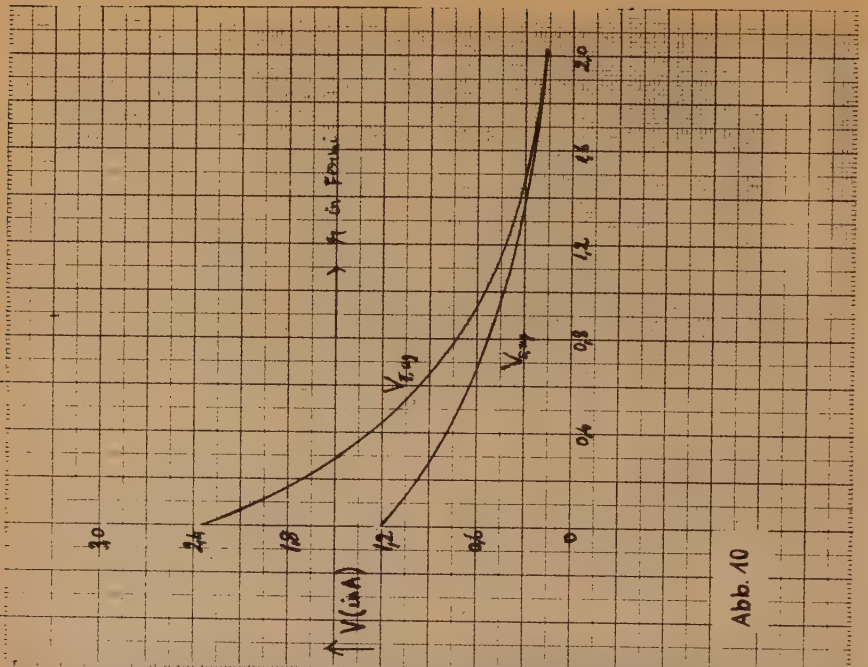
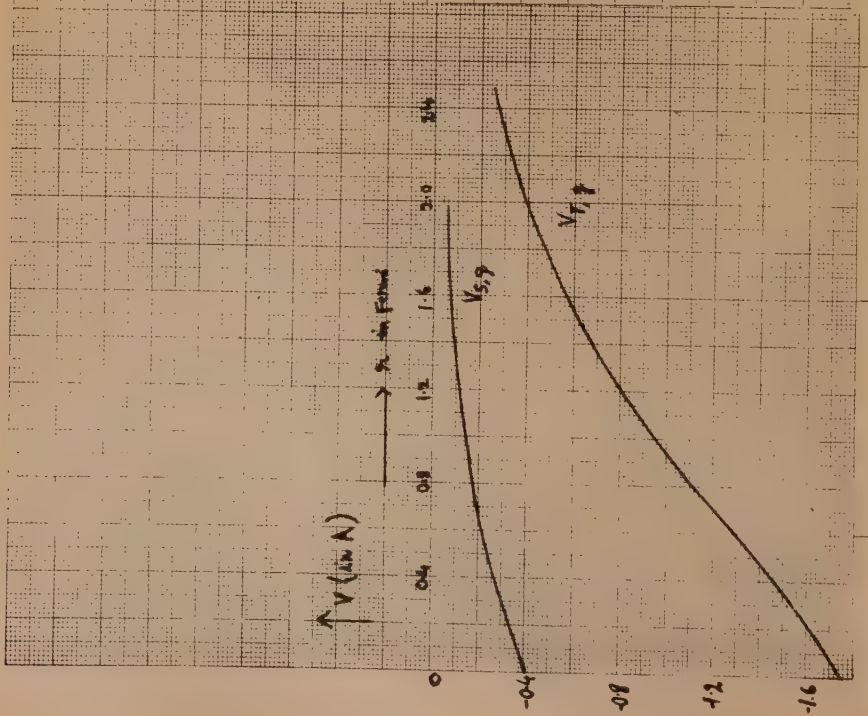


Abb. 10

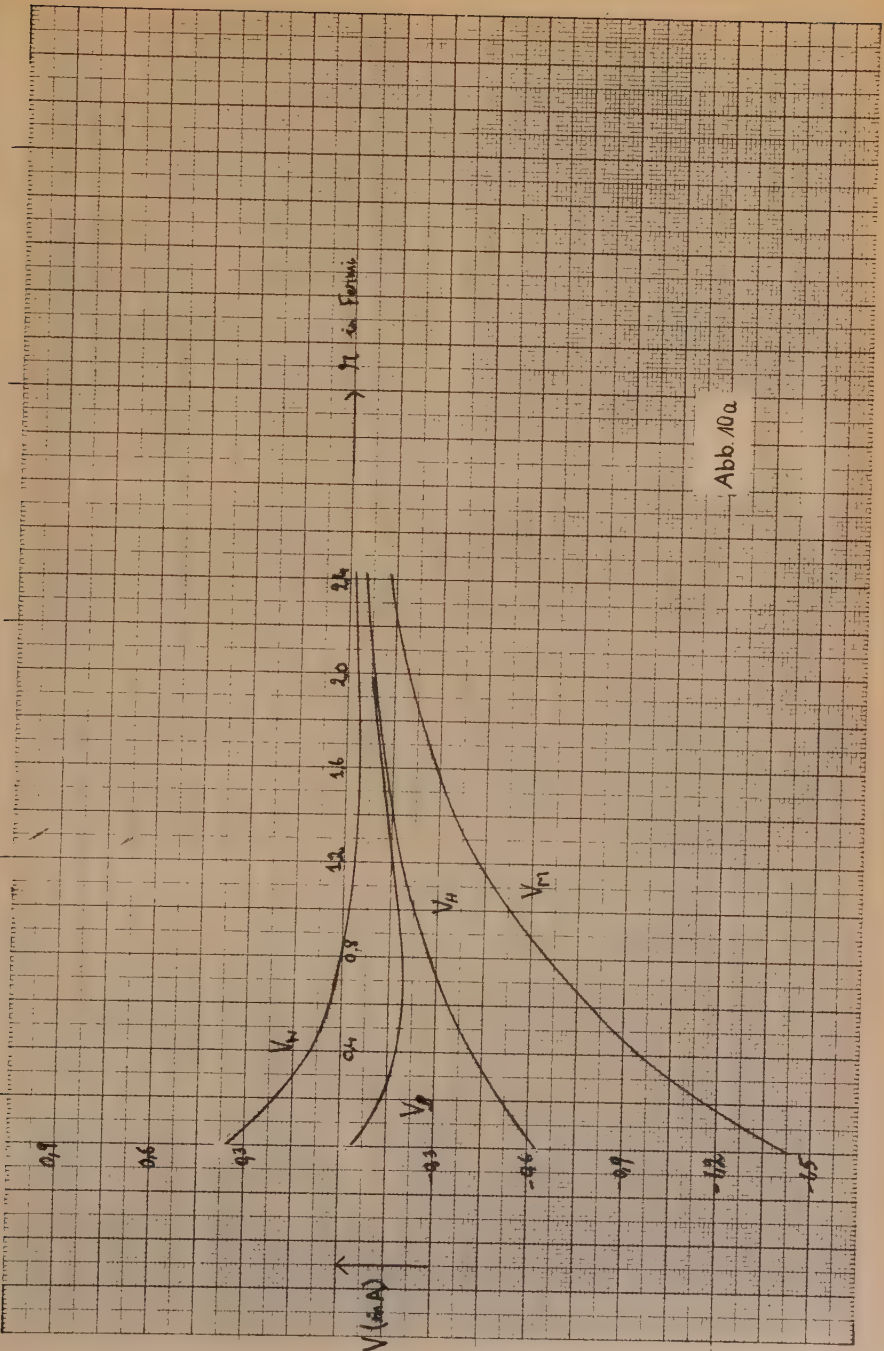


Abb 10a

$\uparrow V(\text{in A})$

$\rightarrow \pi \text{ in Fermi}$

0 0.4 0.8 1.2 1.6 2.0

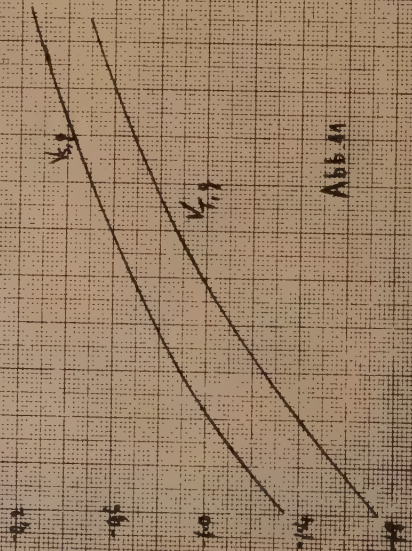


Abb. 41

$\uparrow V(\text{in A})$

$\rightarrow \pi \text{ in Fermi}$

0 3 6 9 12 15

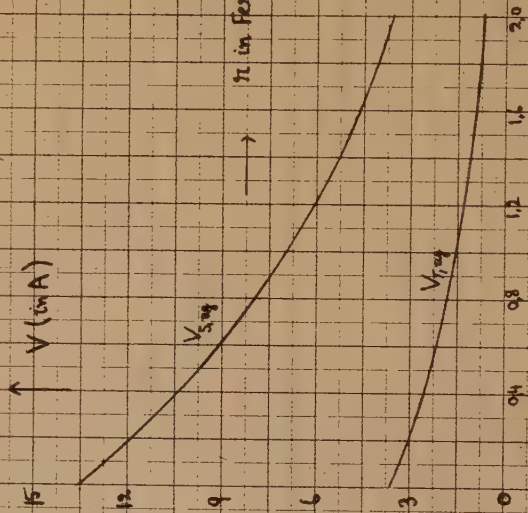


Abb. 11a

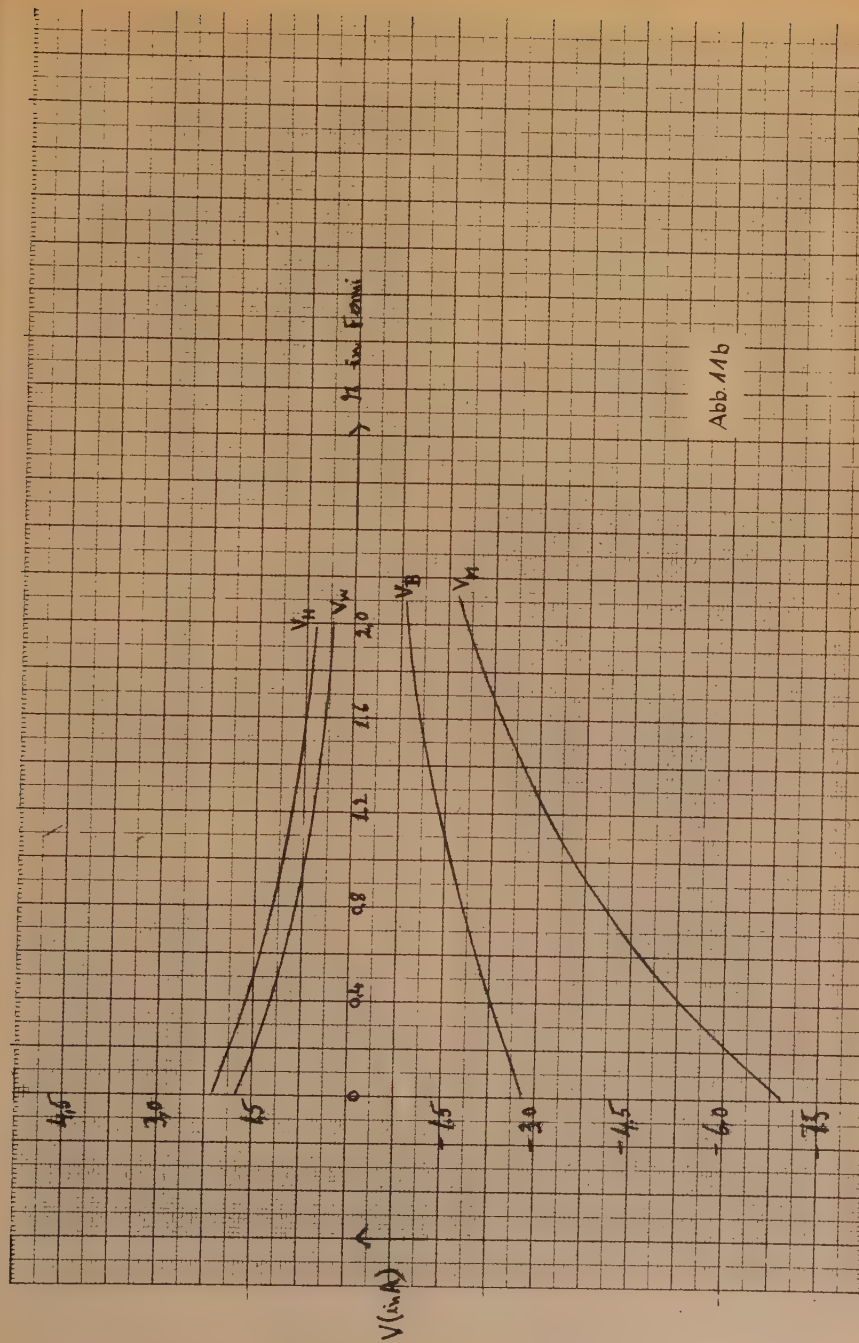
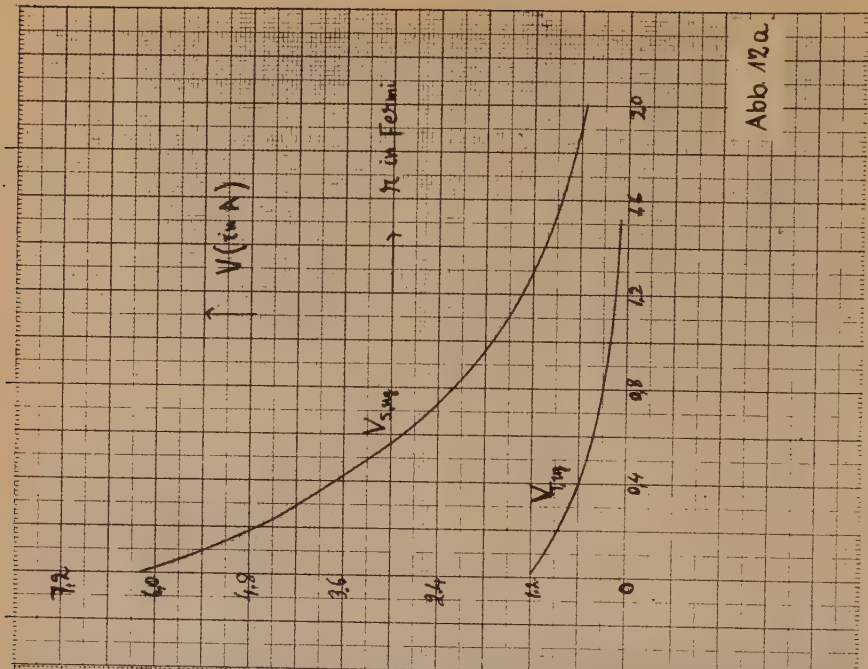
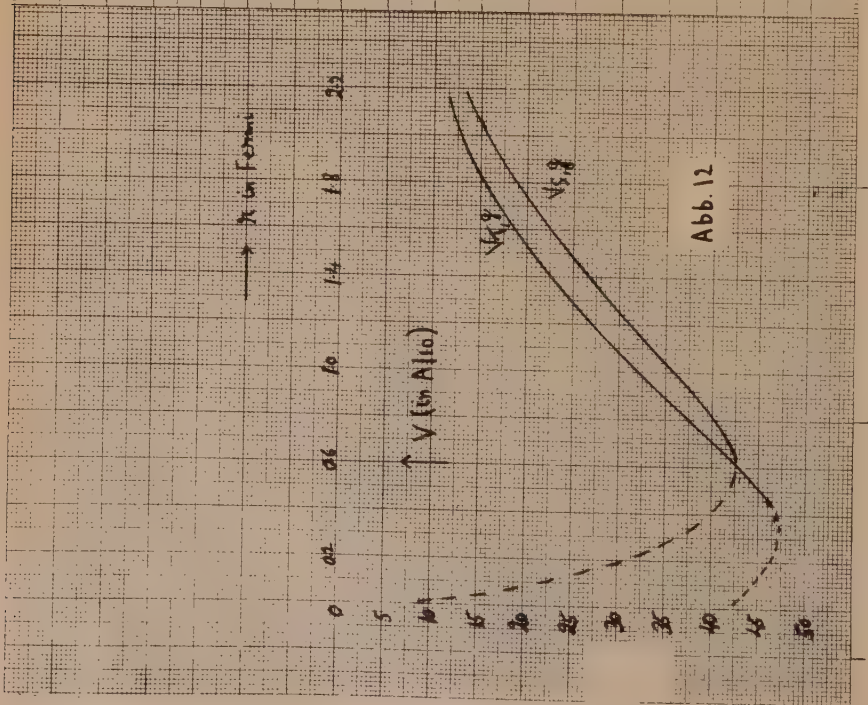


Abb. 11b



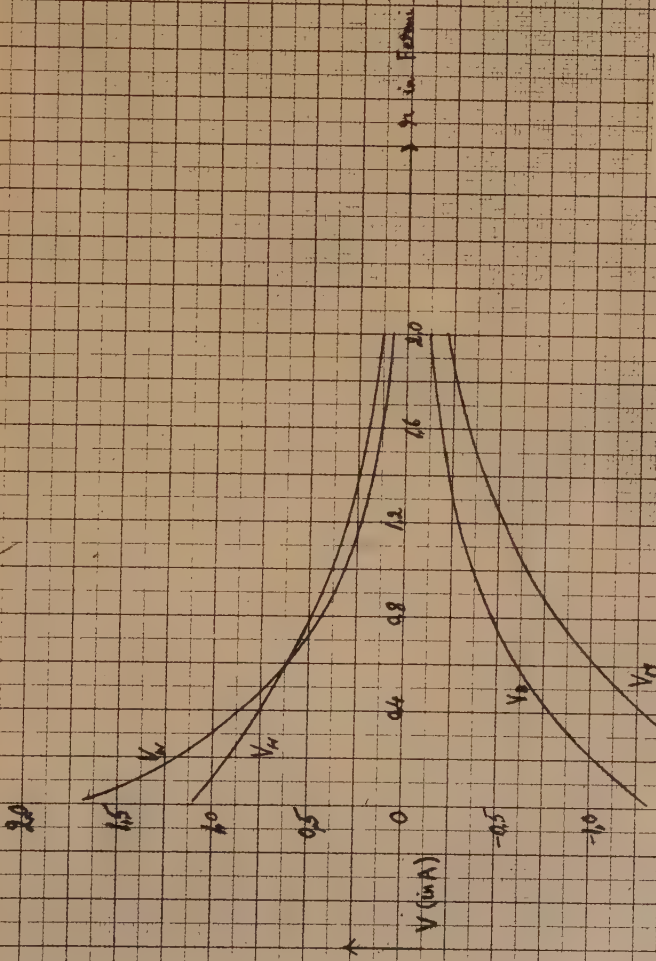


Abb. 12b

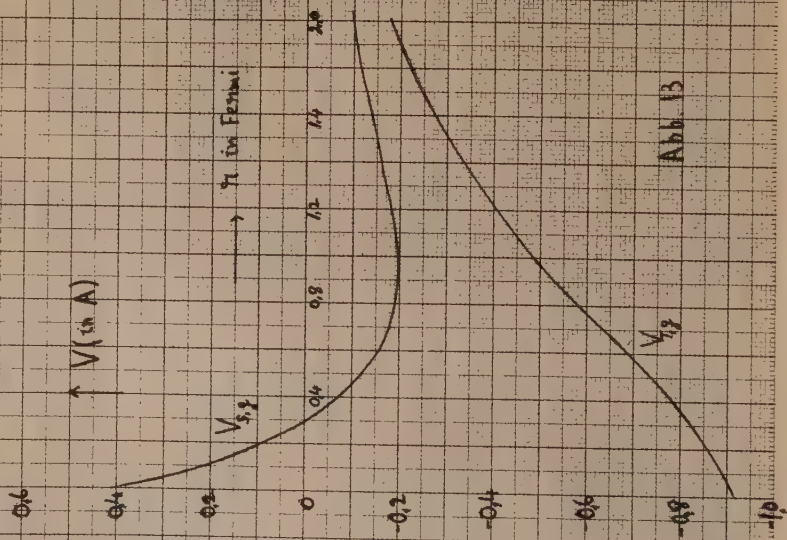


Abb. 13

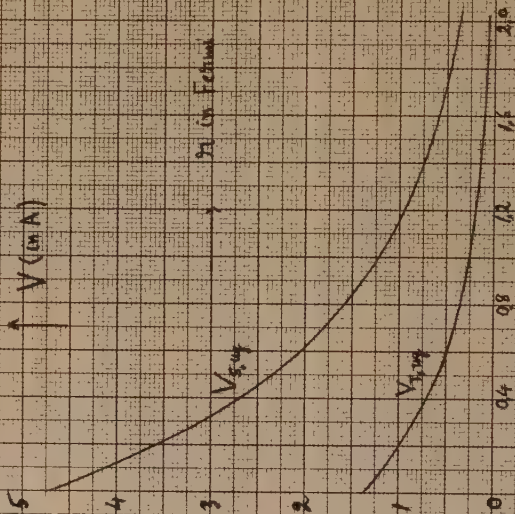


Abb. 13a

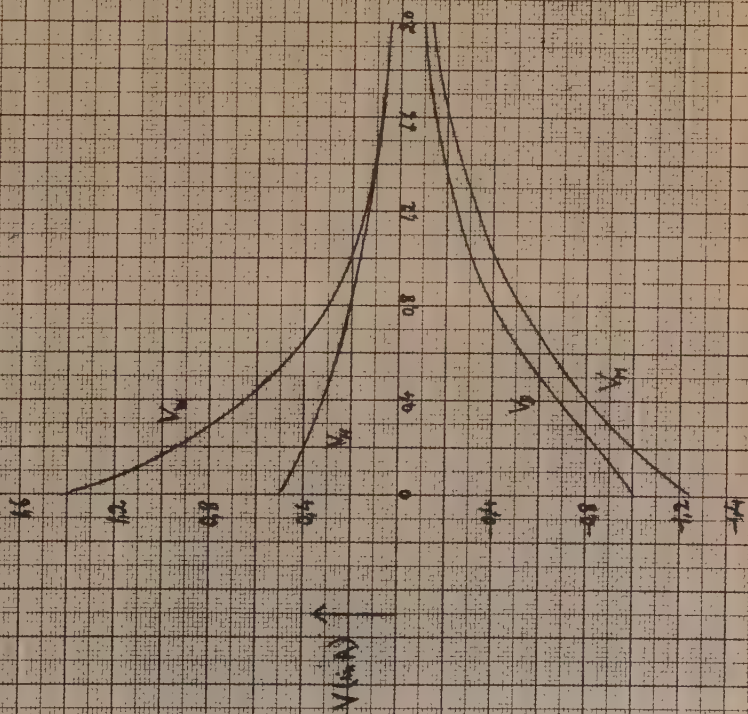
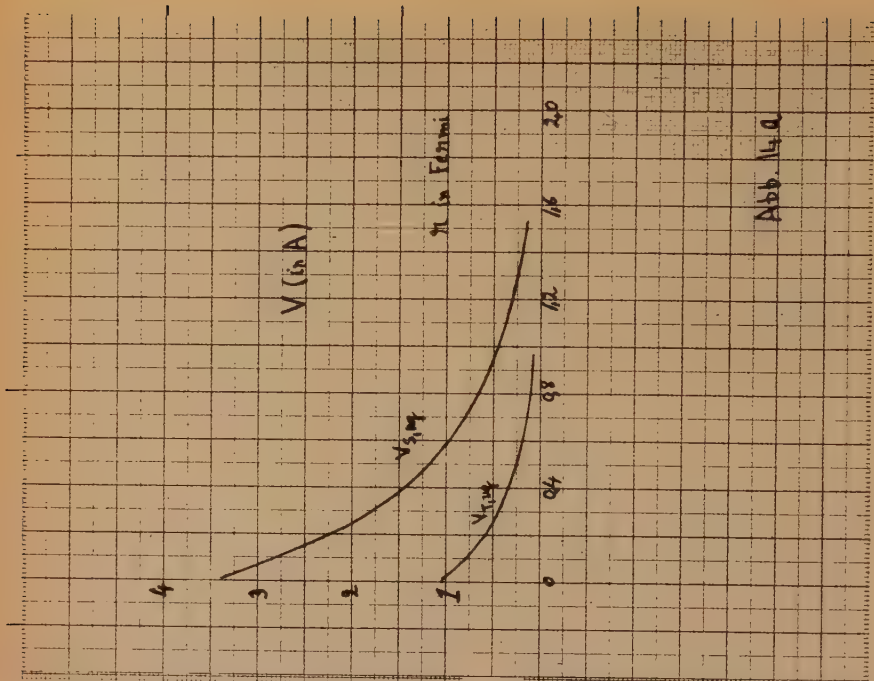
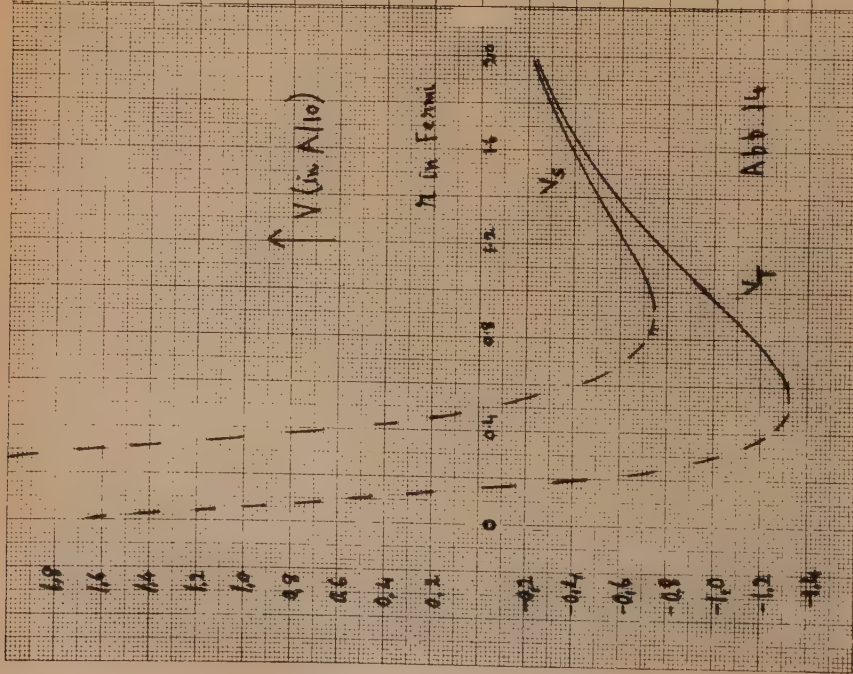


Abb. 13b

1.0

1.0 in. 1.0



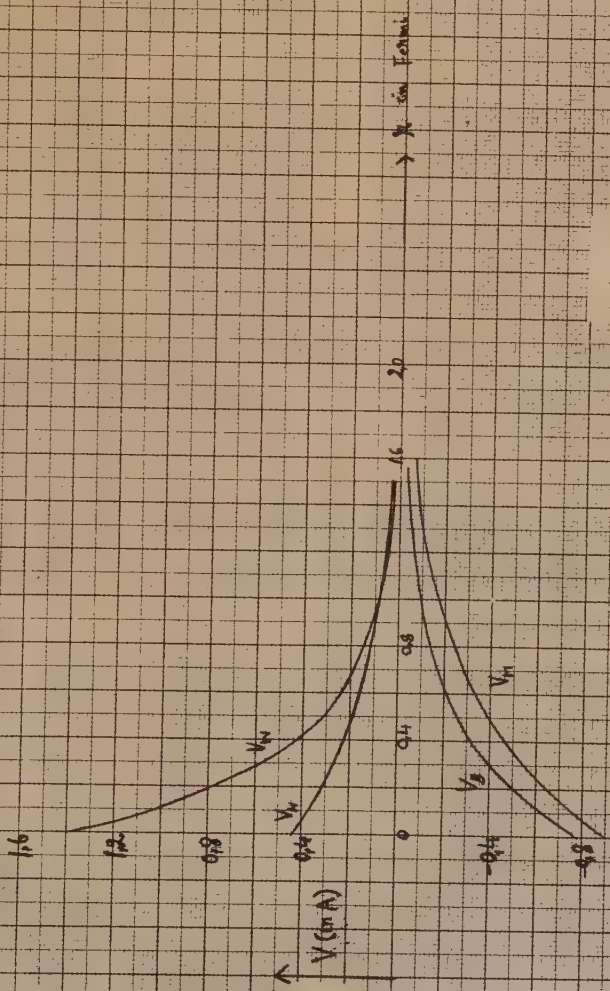


Abb. 14 b

Z u s a m m e n f a s s u n g .

Im Rahmen der Brueckner'schen Theorie wird aus einer Zweiteilchenwechselwirkung ein Einteilchen-Potential für unendlich ausgedehnte Kernmaterie abgeleitet. Für die Zweiteilchenwechselwirkung wird folgender Ansatz gemacht:

$$V_{ij} = (A + B \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) e^{-\alpha r} + (C \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j + D (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)) e^{-\beta r}$$

$\alpha \neq \beta$

σ stellt den Spinoperator und τ den Isospinoperator dar.

Mit Hilfe des Einteilchenpotentials wird die Energiedichte aus der gemittelten potentiellen Energie pro Teilchen bestimmt. Sie ist eine Funktion der Materiedichte. Man sucht das Minimum der Energiedichte gegenüber der Variation der Materiedichte. Bei der so bestimmten "optimalen" Materiedichte ist die Kernmaterie gesättigt. Wir erhalten damit einen Zusammenhang zwischen der "optimalen" Dichte und den Konstanten des Zweiteilchenwechselwirkungsansatzes. Der Verlauf der "optimalen" Dichte für verschiedene Werte dieser Konstanten wird in den beiden Fällen $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ graphisch angegeben.

Die Verhältnisse zwischen den Konstanten A, B, C und D, die zur Sättigung führen, sind von geringerem Betrag, als die übliche Mischung. (Wi. 1 und 2; Ro. 1; Vo. 1; Ke. 1).

Es wird qualitativ untersucht, inwiefern die so gefundenen Sättigungspotentiale das Verhalten der $n - p$ und $p - p$ differentiellen Wirkungsquerschnitte wiedergeben.

Lebenslauf.

Am 12. Oktober 1934 wurde ich in Bangalore, Indien geboren. Dort besuchte ich von 1941 bis 1946 die "Arya Vidya School", und von 1946 bis 1949 die "Gandhi Nagar High School". 1949 legte ich die Abschlußprüfung ab. Danach studierte ich an der Universität Mysore. Ich bestand dort die Prüfungen zum "Intermediate in Science" und zum Grad des "Bachelor of Science" im Jahre 1951 bzw. 1953.

1953 bezog ich die Universität Delhi. An dieser Universität bestand ich 1955 meine Prüfung zum Grad des "Master of Science" im Fach Physik. Von Januar 1956 bis Mai 1957 war ich im "Department of Physics" der Universität Delhi als Forschungsstudent tätig.

Seit Mai 1957 befinde ich mich im Institut für Theoretische Physik der Universität München. Meine Tätigkeit am Institut für Theoretische Physik wurde durch Stipendien des Deutschen Akademischen Austauschdienstes, Bonn, und des Bayerischen Staatsministeriums für Kultus und Unterricht unterstützt.
